

Skriptum zur Vorlesung

# Theoretische Physik C

## Elektrodynamik

Ralph v. Baltz

Institut für Theorie der Kondensierten Materie  
Universität Karlsruhe, WS 1998/99



## **Inhaltsverzeichnis (nach Sachgebieten–nicht chronologisch geordnet!)**

### **Einleitung**

#### **Kap. I Das Elektromagnetische Feld und seine Beschreibung**

1. Das EMF als physikalisches System
2. Maxwell-Gleichungen
3. Physikalische Grössen und Erhaltungssätze
4. Lorentz' sche Ableitung der MGLs für Materie

#### **Kap. II Mathematische Hilfsmittel**

1. Skalar und Vektorfelder und deren Veranschaulichung
2. Integralbildungen auf Feldern
3. Verknüpfungen von Feldern über Integralbildungen: Gradient, Rotation, Divergenz
4. Zylinder- und Kugelkoordinaten
5. Zusammenstellung wichtiger Formeln der Vektoranalysis
6. Deltafunktion
7. Legendre–Polynome
8. Transformation von Vektoren und Tensoren gegenüber Drehungen
9. Hauptachsentransformation
10. Kugelfunktionen
11. Nichtlineare, dispersive Wellen: Solitonen (23. Dez. !)
12. Green-Funktionen

#### **Kap. III Elektrostatik**

1. Das Feld vorgegebener Ladungsverteilungen: Skalar–Potential
2. Beispiele zur Lösung der Laplace– und Poissongleichung
3. Etwas Potentialtheorie
4. Das Feld zweier Punktladungen: Multipole
5. Multipolentwicklungen
6. Beispiel: Metallkugel im angelegten homogenen  $\mathbf{E}$ -Feld.
7. Energie von Ladungsverteilungen, Kapazitäten

#### **Kap. IV Magnetostatik**

1. Das Feld vorgegebener Stromverteilungen: Vektorpotential
2. Beispiele: Homogenes Feld, Draht, Scheibe

#### **Kap. V Zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder**

1. Energie und Impuls des EMF's und deren Ströme
2. Quasistationäre Felder, magnetische Feldenergie, Induktivitäten
3. Elektromagnetische Wellen im Vakuum
4. Wellen in Hohlleitern
5. Eigenschwingungen von Resonatoren
6. Das Feld bewegter Ladungen
7. Hertz' scher Dipol

## **Kap. VI Materie im Elektromagnetischen Feld (4.5 Doppelstunden)**

1. Maxwellgleichungen und Materie-Felder  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$
2. Grenz- und Randbedingungen
3. Materialgleichungen für statische Felder
4. Ferroelektrische Platte
5. Dielektrischer Zylinder im angelegten Feld
6. Permanentmagnet
7. London-Gleichungen und Supraleiter im Magnetfeld
8. Energiesatz für Felder in Materie
9. Drude- und Lorentzmodelle für zeitabhängige Felder in Metallen/Isolatoren

## **Kap. VII Kovariante Formulierung, spezielle Rel. Theorie (4.5 Doppelstdn)**

1. Raum-Zeitbegriff und Lorentz-Transformation
2. Vierervektoren und Tensoren
3. Viererpotential und Feld einer gleichförmig bewegten Ladung
4. Feldgleichungen, Energie-Impuls Tensor
5. Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik

Empfohlene Lehrbücher:

Fliessbach

Jackson

Cheston

Nolting

Greiner

Cook

Becker-Sautter

Landau-Lifschitz, Bd. 2 (zur Relativitätstheorie)

## Einleitung

Elektronen, Protonen, Neutronen und alle Materie, die daraus aufgebaut ist haben neben der Masse ( und natürlich Energie, Impuls ... ) weitere **mengenartige** Grössen, von denen hier die elektrische Ladung die wichtigste ist.

	Masse	Ladung	el. Moment	mag. Moment
Elektron	$m_e$	$-e$	0	$-1.00115966\mu_B$
Proton	$m_p \approx 1836m_e$	$e$	0	$+2.79278\frac{m_e}{m_p}\mu_B$
Neutron	$m_n \approx 1038m_e$	0	0	$-1.91315\frac{m_e}{m_n}\mu_B$
Muonen	$m_\mu \approx 207m_e$	$\pm e$	0	$\pm 1.00116\frac{m_e}{m_\mu}\mu_B$
Pionen	$m_\pi \approx 260m_e$	$\pm e, 0$	0	0

Aus diesen Teilchen zusammengesetzte Systeme, wie Atome, Moleküle ... Festkörper können neben der Ladung noch (permanente und induzierte) elektrische und magnetische (Dipol-) Momente und kompliziertere Grössen haben.

Bezugsgrössen:

$$\begin{aligned}
 \text{(Ruhe-) Masse des Elektrons } m_e &= 9.1093897510^{-31} \text{ kg} \\
 \text{Elementarladung } e &= 1.602177310^{-19} \text{ As} \\
 \text{Bohr-Magneton } \mu_B &= 1.165410^{-29} \text{ Vsm}
 \end{aligned}$$

Warum in der Natur nur dieser Wert der Elementarladung auftritt, ist nicht geklärt. Auch hat man, trotz intensiver Bemühungen, bisher noch keine magnetischen Ladungen entdeckt. Wenn es diese gäbe, dann hätten diese andere Eigenschaften, als das elektrische Gegenstück. Im Gegensatz dazu hat die Quantenmechanik die Frage beantwortet, warum Elektronen, Protonen und Neutronen ein magnetisches Moment haben, nicht aber das Pion. Es gelang sogar, daen Wert dieser Grösse mit grosser Präzision zu berechnen.  $\mu_B = e\hbar/2m_e$  bezeichnet das sog. Bohr-Magneton.

Ladungen üben Kräfte aufeinander aus.

Für Punktladungen ist dies das Coulomb-Gesetz:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|} \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (2)$$

Für magnetische Momente ist der Ausdruck erheblich komplizierter:

Beide Formeln sind aber gar keine Gesetze, denn sie gelten nur für **ruhende** Ladungen bzw. Momente! Für bewegte Ladungen hängt die Kraft in komplizierter Weise sowohl vom Abstand als auch vom Bewegungszustand ab und ist zudem redardiert. Ausserdem gibt es "zwischen" den Ladungen auch noch "etwas", das **Elektromagnetische Feld** (=EMF). Beschleunigte Ladungen strahlen Energie, Impuls und Drehimpuls ab.

Beispiel: Magnetron in der "Mikrowelle"

# I Das Elektromagnetische Feld (EMF)

## 1 Das EMF als physikalisches System

Der Begriff des Felds ersetzt zunächst die dem Coulombgesetz unterliegende Fernwirkungsvorstellung durch eine Nahwirkungsbeschreibung: Die Ladung  $Q_2$  erzeugt ein Feld  $\mathbf{E}_2$ , welches mit  $Q_1$  lokal wechselwirkt  $\mathbf{F}_{12} = Q_1 \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1)$  und umgekehrt. Diese Auffassung ist jedoch insofern inkonsequent, da die Kräfte, die die beiden Ladungen aufeinander ausüben, nicht als Folge des gesamten, von beiden Ladungen gemeinsam erzeugten Felds beschrieben wird. (Die obige Beschreibung funktioniert auch nur solange, wie die  $\mathbf{E}_2$  erzeugende Ladungsverteilung nicht durch die Anwesenheit der "Probeladung"  $Q_1$  verändert wird!). Diesen Mangel werden wir jedoch beheben können.

Das EMF ist aber wesentlich mehr – es ist selbst ein dynamisches System, das Energie, Impuls, Drehimpuls etc. besitzt und transportiert. Im Gegensatz zu einem mechanischen System aus Masseteilchen, hat ein Feld (überabzählbar) unendlich viele Freiheitsgrade. Diese werden durch die mathematischen Felder  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  beschrieben, die (im Prinzip) am jedem Raumpunkt  $\mathbf{r}$  andere Werte haben können. Diese Felder hängen mit den Ladungen und Strömen über die Maxwell-Gleichungen zusammen.

## 2 Maxwell-Gleichungen

$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t),$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$	$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$

elektrische Feldkonstante	$\epsilon = 8.854187817 \cdot 10^{-12}$	As/(Vm)
magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/(Am)
Lichtgeschwindigkeit	$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 299\,792\,458$	m/s

Die Bedeutung der Felder  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  wird durch den Zusammenhang mit der Kraft(-dichte) auf die Ladungs- und Stromdichten  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  festgelegt.

Kraft-Dichte:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

wobei die Größe "Kraft" aus der Mechanik als bekannt vorausgesetzt wird.

Interpretation der Maxwell-Gleichungen in obiger Form:

- $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  werden durch ihrer Wirbel und Quellenverteilungen festgelegt.
- Ursachen des  $\mathbf{E}$ -Felds: Ladungen und sich ändernde Magnetfeld.  $\mathbf{E}$ -Linien beginnen und enden nur an Ladungen.
- Ursachen des  $\mathbf{B}$ -Felds: Ströme (d.h. bewegte Ladungen) und sich ändernde el. Felder.  $\mathbf{B}$ -Linien sind stets geschlossen.
- Für statische Felder zerfällt das EMF in zwei ungekoppelte Teilsysteme: elektrisches und magnetisches Feld.

Fragen:

- Im welchem Bezugssystem gelten die Maxwellgleichungen?
- Magnetische Momente sind natürlich auch die Quellen von  $\mathbf{B}$ . Wie fügt man diese in den Maxwellgleichungen ein?
- Wie würden magnetische Ladungen und Ströme – wenn es sie gäbe – in den MGLn auftreten?

Andere Schreibweise und Interpretation der Maxwellgleichungen:

$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t),$	$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t),$
$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$

Die erste Gruppe kann als Bewegungsgleichungen der Wirbelanteile von  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  aufgefasst werden. Die zweite Gruppe beschreibt "starre Zwangsbedingungen" der Quellen.

Das Ziel dieser Vorlesung ist es, von den Maxwellgleichungen auszugehen und die physikalischen Phänomene abzuleiten. Hierfür müssen wir uns zunächst mit der Beschreibung und der Mathematik von Feldern vertraut machen.

### 3 Physikalische Grössen und Erhaltungssätze

#### Physikalische Grössen des EMF's:

In einem Zustand hat jede physikalische Grösse einen festen Wert, d.h. ist eine Funktion von  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ . Im Gegensatz zu Systemen aus Punktteilchen, für die die Zustandsgrössen  $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, i = 1 \dots N$  haben Felder überabzählbar viel Freiheitsgrade, die durch die Werte von  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  an jedem Raumpunkt festgelegt werden (fester Zeitpunkt!) Die physikalischen Grössen eines Felds sind daher Funktionen von  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  (genauer: Funktionale, d.h. Integrale über die Felder); die Grössen sind räumlich verteilt, d.h. werden durch **Dichten** beschrieben.

Die Ihnen naheliegendste Grösse ist die Lorentzkraft, welche die Kraft auf eine (Probe-)Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r},t)$  und Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$  mit  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  in Verbindung bringt.

$$\mathbf{f}(\mathbf{r},t) = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

Die Gesamte Kraft ist dann das Integral über die Kraftdichte.

$$\mathbf{F}(t) = \iiint \mathbf{f}(\mathbf{r},t) dV$$

#### Erhaltungssätze:

Als Beispiel betrachten wir die Erhaltung der elektrischen Ladung. Ausgehend von der Maxwellgleichung

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

finden wir durch Anwenden der Divergenz und  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0.$$

Warum drückt diese Gleichung die Erhaltung der elektrischen Ladung aus? Integration über ein festes Volumen  $\mathcal{V}$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r},t) dV + \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r},t) dV = 0$$

und Umformung des zweiten Terms mit Hilfe des Gauss'schen Satzes liefert:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\oiint_{\mathcal{F}} \mathbf{j}(\mathbf{r},t) d\mathbf{A}$$

D.h. die im Volumen  $\mathcal{V}$  eingeschlossene Ladung  $Q(t)$  ändert sich (nur) dadurch dass sie über die Oberfläche  $\mathcal{F}$  hinaus- oder hineinströmt.

Wenn eine Grösse  $\mathcal{G}$ , deren Wert  $G$  in einem Volumen  $\mathcal{V}$ , mit einer anderen Grösse  $I$ , deren Wert sich auf die Oberfläche  $\mathcal{F}$  dieses Volumens bezieht und einer dritten Grösse  $S$ , die sich wieder auf das Innere von  $\mathcal{V}$  bezieht, auf folgende Art zusammenhängt

$$\frac{dG}{dt} = I_{\mathcal{G}} + S_{\mathcal{G}}, \quad (3)$$

so ist es zweckmässig, sich von  $\mathcal{G}$  das Bild einer Menge zu machen, das von  $I$  der zugehörigen Stromstärke und das von  $S$  das der entsprechenden Erzeugungsrate.

Im allgemeinen besitzt eine (mengenartige) Grösse  $\mathcal{G}$  daher eine Dichte  $\rho_{\mathcal{G}}(\mathbf{r},t)$ , eine Stromdichte  $\mathbf{j}_{\mathcal{G}}(\mathbf{r},t)$  und (meist auch noch) eine Erzeugungs/Vernichtungsdichte  $\sigma_{\mathcal{G}}(\mathbf{r},t)$ .

Erhaltungssatz der Grösse  $\mathcal{G}$ :

$$\frac{\partial \rho_{\mathcal{G}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathcal{G}}(\mathbf{r},t) = \sigma_{\mathcal{G}}(\mathbf{r},t)$$

oder in integraler Form:

$$\frac{dG(t)}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_{\mathcal{G}}(\mathbf{r},t) dV = -\oiint_{\mathcal{F}} \mathbf{j}_{\mathcal{G}}(\mathbf{r},t) dA + \iiint_{\mathcal{V}} \sigma_{\mathcal{G}}(\mathbf{r},t) dV$$

Der Wert von  $\mathcal{G}$  innerhalb des Volumens  $V$  kann sich aus zwei Gründen ändern:

1. Strömen durch die Oberfläche  $\mathcal{F}$  von  $V$ , dann bleibt sie dem System erhalten,
2. Erzeugung/Vernichtung, dann geht sie dem System verloren.

Ist  $\rho_{\mathcal{G}\mathbf{r}}$  eine vektorielle Grösse, dann gehört zu jeder Komponente ein Stromdichte-Vektor, d.h. die gesamte Stromdichte ist ein Tensor zweiter Stufe. Ein Beispiel hierzu ist der Impuls des EMF's.

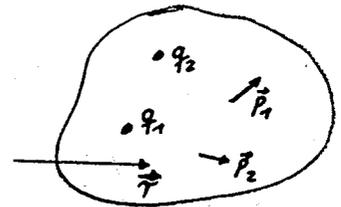
## 4 Lorentz'sche Ableitung der MGL's für Materie

Dieser Teil ist eine Ergänzung von Kap VI.1.

Für statische Felder lassen sich die makroskopischen MGLs durch Mittelung der stark fluktuierenden mikroskopischen Felder gewinnen.

Zur Herleitung der MGLs beschränken wir uns zunächst auf die Elektrostatik und teilen die Ladungen der Materie in zwei Klassen ein:

- (a) freie Ladungen
- (b) dipolar gebundene Ladungen in Atomen und Molekülen, deren Verteilung über atomare Distanzen jeweils als konstant angesehen werden darf.



mikroskop. Potential: 
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \vec{p}_j \cdot \text{grad}_{\vec{r}_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right\}$$

oder für kontinuierliche Ladungs- und Dipolverteilungen.

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{p}(\vec{r}') \cdot \text{grad}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left\{ \frac{\rho(\vec{r} + \vec{r}')}{r'} + \vec{p}(\vec{r} + \vec{r}') \text{grad}_{\vec{r}'} \frac{1}{r'} \right\} dV' \end{aligned}$$

Mittelwertbildung führt auf das

makroskop. Potential: 
$$\phi(\vec{r}) \equiv \langle \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \text{grad}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} dV'$$

Polarisation: 
$$\vec{P}(\vec{r}) \equiv \langle \vec{p}(\vec{r}') \rangle = \frac{N_0}{V_0} \cdot \vec{p}_j$$

$N_0/V_0$  bezeichnet die Dichte der Dipole,  $\vec{p}_j$  das mittlere Moment eines Dipols. Außerhalb des Körpers ist  $\vec{P}(\vec{r}) \equiv 0$ . Um den Zusammenhang von  $\vec{P}(\vec{r})$  mit der Dichte der Polarisationsladungen  $\rho_{\text{pol}}(\vec{r})$  aufzudecken, schreiben wir den zweiten Term in  $\phi(\vec{r})$  um:

Vektoridentität: 
$$\text{div}(\vec{P} \cdot f) = \vec{P} \cdot \text{grad} f + f \cdot \text{div} \vec{P}$$

hieraus: 
$$\vec{P}(\vec{r}') \text{grad}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \text{div}_{\vec{r}'} \left( \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\text{div}_{\vec{r}'} \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Einsetzen in die Beziehung für  $\phi(\vec{r})$  und Umformung des Volumenintegrals über die Divergenz in ein Oberflächenintegral liefert:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Vol. d. Materie}} \frac{\rho(\vec{r}') - \text{div}_{\vec{r}'} \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\text{Oberfl.}} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{F}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

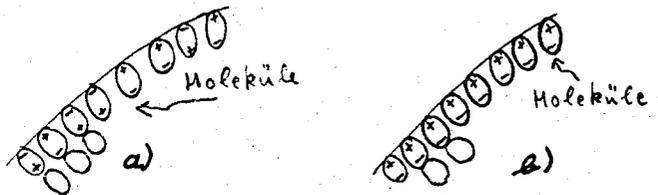
Dichte der Polarisationsladungen  
("gebundene" Ladungen)

Oberflächenladungsdichte

$$\rho_{\text{pol}} = -\text{div } \vec{P}$$

$$\sigma = (\vec{P})_{\text{Normalkomp.}}$$

Vergrößerter Ausschnitt eines unpolarisierten (a) und (b) eines polarisierten Dielektrikums



$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \text{div } \vec{P}(\vec{r})$$

Es liegt nun nahe,  $\epsilon_0 \vec{E}$  und  $\vec{P}$  zu einem neuen Vektor  $\vec{D}$  zusammenzufassen,

dielektrische Verschiebung:

Maxwellgleichungen für

elektrostat. Felder in Materie

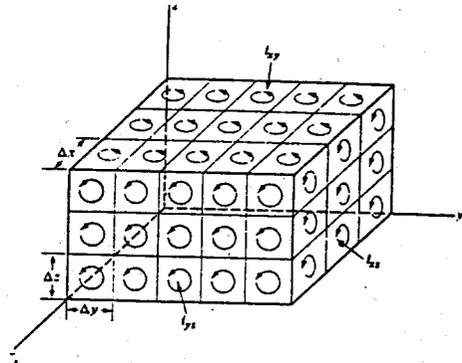
$$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

Die Quellen und Senken von  $\vec{D}$  werden daher allein durch die freien Ladungen bestimmt.

In einem nächsten Schritt leiten wir die Maxwellgleichungen für zeitlich konstante Magnetfelder in Materie her. Den Beitrag der "gebundenen Ströme"  $\vec{j}_{\text{mag}}$  drücken wir mit Hilfe der magnetischen Momente  $\vec{m}_j$  aus.



mikroskop. Vektorpotential: 
$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_j \frac{\vec{m}_j \times (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left\{ \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{m}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} dV'$$

makroskop. Vektorpotential: 
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left\{ \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left\{ \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{M}(\vec{r}') \times \text{grad}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} dV'$$

Magnetisierung: 
$$\vec{M}(\vec{r}) = \langle \vec{m}(\vec{r}) \rangle = \frac{N_0}{V_0} \overline{\vec{m}_j}$$

$\overline{\vec{m}_j}$  bezeichnet das mittlere magnetische Moment eines Dipols. Außerhalb des Körpers ist  $\vec{M}(\vec{r}) \equiv 0$ .

Um den Zusammenhang von  $\vec{M}(\vec{r})$  mit  $\vec{j}_{\text{mag}}(\vec{r})$  aufzudecken, schreiben wir den zweiten Term in  $\vec{A}(\vec{r})$  um.

Vektoridentität:  $\text{rot}(f\vec{M}) = (\text{grad}f) \times \vec{M} + f \text{rot}\vec{M} \quad f = f(\vec{r}), \vec{M} = \vec{M}(\vec{r})$

hieraus: 
$$\vec{M}(\vec{r}') \times \text{grad}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\text{rot}_{\vec{r}'} \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{rot}_{\vec{r}'} \vec{M}(\vec{r}')$$

Damit wird: 
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}') + \text{rot} \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \text{rot}_{\vec{r}'} \left( \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'$$

Offenbar ist  $\text{rot}\vec{M}(\vec{r}) = \vec{j}_{\text{mag}}(\vec{r})$ . Was aber beschreibt das zweite Integral? Mit den uns bisher zur Verfügung stehenden Integralsätzen können wir das Integral nicht umformen, aber es gilt:

Integralsatz: 
$$\iiint_V \text{rot } \vec{A} \, dV = \oint_{\partial V} d\vec{F} \times \vec{A} = - \oint_{\partial V} \vec{A} \times d\vec{F}$$

Vektorpotential 
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') + \text{rot } \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{F}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Das zweite Integral beschreibt daher den Beitrag von Oberflächenmagnetisierungsströmen zum Magnetfeld

Volumen - Magnetisierungsstromdichte

$$\vec{j}_{\text{mag}}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{M}(\vec{r})$$

Oberflächen -

"

$$\vec{j}_{\text{mag}}^{\text{Ob.}}(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \times \vec{n} \quad \vec{r} \in \text{Ob.}$$

also ist 
$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{mag}}) = \mu_0 \vec{j}_{\text{frei}} + \mu_0 \text{rot } \vec{M}$$

Es ist nun naheliegend ein neues Feld  $\mu_0 \vec{H} = \vec{B} - \mu_0 \vec{M}$  zu definieren, dessen Wirbelverteilung allein durch die makroskopischen Ströme  $\vec{j}(\vec{r})$  bestimmt ist.

magnetische Erregung

$$\vec{H} := \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$$

Maxwell-Gleichungen für  
statische Magnetfelder  
in Materie

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}(\vec{r})$$

Für zeitabhängige Ladungs- und Stromverteilungen werden auch die Felder  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ , zeitabhängig. Die Maxwell-Gleichungen haben dann die Form: (aber den Term  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  in (3) erhält man nicht so leicht.)

$$1) \quad \text{div } \vec{D} = \rho(\vec{r}, t) \quad \text{oder} \quad \oint \vec{D} d\vec{F} = \iiint \rho(\vec{r}, t) \, dV = Q$$

$$2) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \oint \vec{E} d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \oint \vec{B} d\vec{F}$$

$$3) \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \oint \vec{H} d\vec{r} = \oint \vec{j}(\vec{r}, t) d\vec{F} + \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{D} d\vec{F}$$

$$4) \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \oint \vec{B} d\vec{F} = 0$$

(Die Integrationsflächen, Kurven oder Volumina wurden als zeitlich konstant vorausgesetzt).

Gleichungen 1) und 4) sind unproblematisch, denn in den Gleichungen für die atomaren Felder kommt die Zeit nur als Parameter in den Feldern, nicht aber in den Gleichungen selbst vor.

## Kritik der Lorentz'schen Ableitung

Die Einteilung der Ladungen und Ströme in freie, Polarisations- und Magnetisierungsanteile erfolgt nicht nach objektiven Kriterien, sondern ist weitgehend willkürlich und orientiert sich nach physikalischen Gesichtspunkten. Leider resultiert hieraus oft eine babylonische Begriffsverwirrung!

So beschreibt man z.B. in einem Metall die Leitungselektronen ganz natürlich als "freie" Ladungen und Ströme, also durch  $\rho_f$  und  $\vec{j}_f$  auf den rechten Seiten der Maxwell'schen Gleichungen und setzt  $\mathbf{P} = 0$  und  $\mathbf{M} = 0$ . Für hochfrequente Felder einer Lichtwelle wird die Oszillationsamplitude der "freien" Elektronen vergleichbar mit atomaren Längen, sodaß faktisch gar kein Unterschied mehr zu einer Beschreibung über "gebundene" Elektronen zutage tritt. D.h. wir können die Beiträge "freier" Elektronen auch durch "Polarisations"-Ladungen und Ströme beschreiben. Das tut man in der Optik meistens auch! Für das Drude-Modell werden wir explizit zeigen, wie man Metall-Elektronen entweder durch eine Leitfähigkeit (d.h.  $\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E}$ ) oder durch eine Dielektrizitätsfunktion ( $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\mathbf{E}$ ) beschreibt.

Die in einem Metall durch Wechselfelder induzierten Wirbelströme (= makroskopische Kreisströme) könnte man statt durch Ströme "freier" Elektronen, genau so gut auch als Magnetisierungsströme  $\text{rot}\mathbf{M}$  erfassen.

In einigen Fällen kann  $\mathbf{P}$  — entgegen der Lehrmeinung — selbst für statische Felder nicht als Dipoldichte aufgefasst werden. In einem Ionenkristall, wie z.B. NaCl, hängt das Dipolmoment von der Wahl der Elementarzelle ab. (Dieses Problem wurde erst kürzlich durch Benutzung einer "geometrischen Invarianten" gelöst!

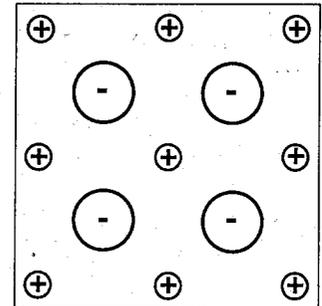


Abbildung 1:

Für zeitabhängige Felder gibt es die Möglichkeit  $\mathbf{M}$ -Anteile zu  $\mathbf{P}$  hinzuzuschlagen und umgekehrt! D.h., es ist à priori nicht festgelegt welche Phänomene elektrischer und welche magnetischer Natur sind! Das sieht man aus folgender Transformation:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}' &= \mathbf{P} + \text{rot}\mathbf{N}, & \text{d.h.} & \quad \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}' = \mathbf{D} + \text{rot}\mathbf{N}, \\ \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}' &= \mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t}, & \text{d.h.} & \quad \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}' = \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t}, \end{aligned}$$

welche die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  invariant lässt. Die Ursache dieser Willkür liegt darin, daß es nur ein einziges Materie-Feld gibt, nämlich  $\mathbf{j}_{mat}(\mathbf{r}, t)$ , das wir aus physikalischen Gründen in mehrere Anteile zerlegt hatten. (Für zeitabhängige Felder ist  $\rho_{mat}(\mathbf{r}, t)$  durch die Kontinuitätsgleichung bis auf einen zeitlich konstanten Anteil festgelegt.)

Hat man sich einmal entschlossen die Ladungen in einer bestimmten Weise einzuteilen, so muss man natürlich dabei bleiben! Aber nicht immer geht das. Z.B. wird beim Photoeffekt ein (in einer inneren Schale) gebundenes Elektron in ein freies überführt. Was nun? Als Ausweg aus dieser misslichen Lage gibt es eigentlich nur einen Ausweg: Die Flucht nach vorn! Sämtliche "magnetischen" Anteile werden über  $\mathbf{P}$  miterfasst und  $\mathbf{j}_{mat}$  wird nicht weiter aufgeteilt (und allein als Funktion von  $\mathbf{E}$  angesehen).  $\mathbf{M} = 0$ ! Allerdings ist diese Auffassung nur bei schnell veränderlichen Feldern gut und versagt zusehens für  $\omega \rightarrow 0$ .

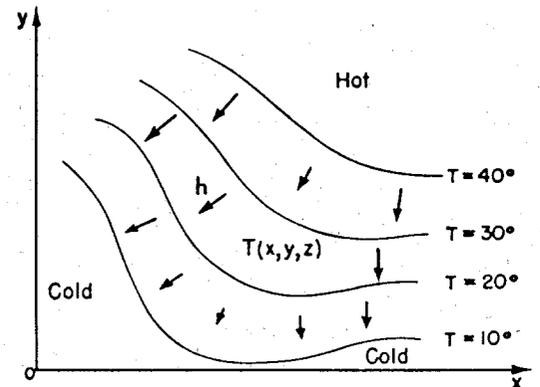
## Kap. II Mathematische Hilfsmittel aus der Vektoranalysis

### § 1 Skalar und Vektorfelder und deren Veranschaulichung

Zunächst betrachten wir die Theorie des Elektromagnetismus aus einer abstrakten mathematischen Sicht. Unser Ziel ist es, die im vorigen Kapitel aufgeführten Maxwell'schen Gleichungen zu verstehen und sie handhaben zu können. Dazu müssen wir zunächst die Mathematik von Vektorfeldern lernen und eine anschauliche Vorstellung entwickeln.

#### Skalarfelder

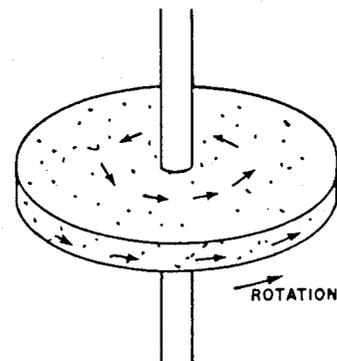
Das einfachste Feld ist ein skalares Feld. Jedem Raumpunkt  $\vec{r}=(x,y,z)$  wird ein einziger Wert  $\phi = \phi(x,y,z)$  zugeordnet.  $\phi(x,y,z,t)$  kann sich auch im Laufe der Zeit ändern. Beispiele für die skalaren Felder sind die Verteilungen von Temperatur, Druck, elektrischer Ladung oder Energie im Raum. Es ist möglich, sich ein skalares Feld aus "Schichten" aufgebaut zu denken auf denen  $\phi(\vec{r})$  konstant ist. Im zweidimensionalen sind die geometrischen Orte  $\phi(x,y)=\text{const.}$  Linien (z.B. Höhenlinien auf einer Landkarte), im dreidimensionalen repräsentieren Werte  $\phi(x,y,z)=\text{const.}$  eine Schar von Flächen (z.B. Isotherme Flächen, Äquipotentialflächen).



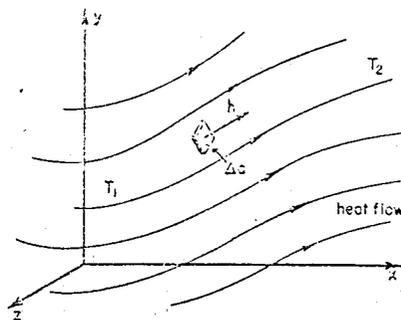
#### Vektorfelder

Jedem Punkt im Raum wird ein Vektor  $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r})$  zugeordnet. Beispiele für Vektorfelder:

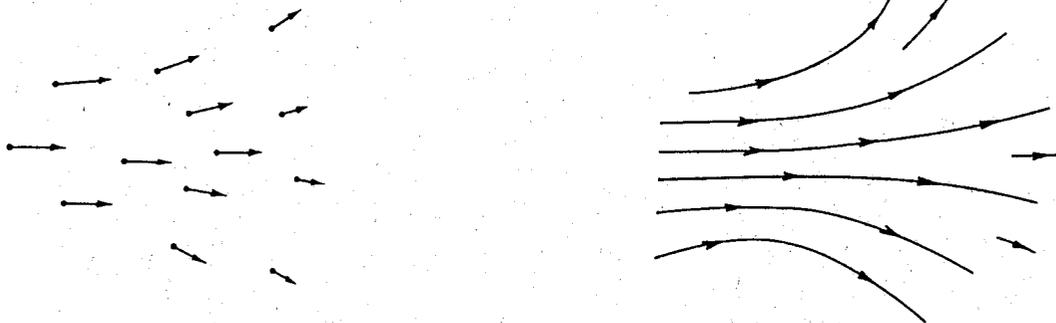
- a) Betrachten wir einen Körper, der sich um eine Achse dreht. Jedem Punkt des Körpers können wir seinen Geschwindigkeitsvektor zuordnen.  $\vec{V}(r) = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ ,  $\vec{\Omega}$  Winkelgeschwindigkeit.



- b) Wärmestromdichte  $\vec{h}$ .  $\vec{h}$  zeigt in Richtung der Strömung. Ihr Betrag ist die Energie, die pro Sekunde durch ein Element einer senkrecht zur Strömung gerichteten Fläche befördert wird, dividiert durch den Flächeninhalt des Elements.



Wir können ein Bild des Vektorfeldes erhalten, indem wir an vielen Punkten des Raumes Vektoren einzeichnen, von denen jeder die Stärke und Richtung des Feldes an dem betreffenden Punkt bestimmt.



Wir können aber auch noch weiter gehen und Linien einzeichnen, deren Tangenten in jedem Punkt die Vektoren sind, die sozusagen den Pfeilen folgen und die Richtung des Feldes angeben. Die Schar dieser Feldlinien beschreiben wir durch die Parameterdarstellung  $\vec{r} = \vec{r}(\tau, c)$ . ( $\tau$  = Kurvenparameter,  $c$  unterscheidet verschiedene Feldlinien)

- a) Gleichung der Feldlinien  $\frac{d}{d\tau} \vec{r}(\tau, c) = \vec{E}(\vec{r}(\tau, c))$
- b) Durch jeden Punkt des Raumes mit  $\vec{E} \neq 0$  geht genau eine Feldlinie. Durch Punkte mit  $\vec{E} = 0$  oder  $\vec{E} = \infty$  können mehrere Feldlinien gehen.
- c) Da Feldlinien "unendlich dicht" liegen, sagt das Feldlinienbild zunächst nichts über die Stärke eines Vektorfeldes aus. Insbesondere haben  $\vec{E}(\vec{r})$  und  $f(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$  die selben Feldlinienbilder. ( $f(\vec{r})$  bezeichnet eine skalare Funktion).
- d) Um die Stärke eines Feldes zum Ausdruck zu bringen, übernehmen wir die Konvention, nach der die Zahl der Feldlinien pro Einheit der rechtwinklig zu den Linien stehenden Fläche proportional zur Feldstärke ist. Es ist zuweilen erforderlich, daß dann neue Linien entstehen oder Linien enden.

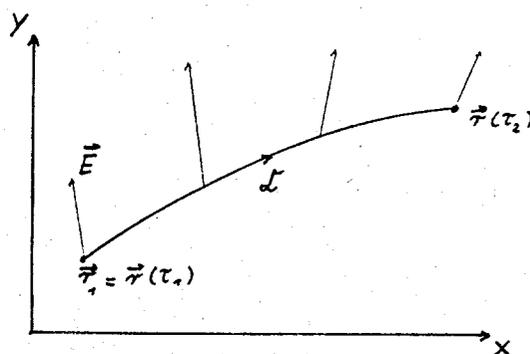
§ 2 Integralbildungen auf Feldern

Es gibt zwei wichtige mathematische Eigenschaften von Vektorfeldern, die wir bei unserer feldtheoretischen Beschreibung der Elektrodynamik verwenden werden: Zirkulation und Fluß. Beide sind Spezialfälle von Linien bzw. Flächenintegralen.

Linienintegral: 
$$\gamma = \int_{\mathcal{L}} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{E}(\vec{r}(\tau)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\tau} \cdot d\tau$$

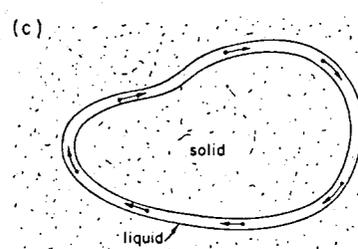
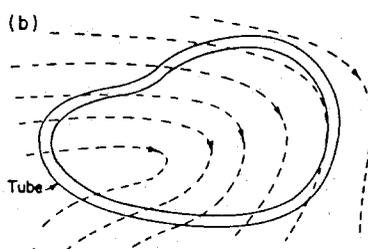
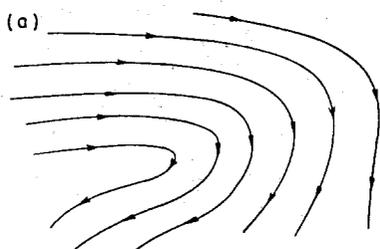
Zirkulation : 
$$\Gamma = \oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Die Kurve  $\mathcal{L}$  sei dabei in Parameterdarstellung  $\vec{r} = \vec{r}(\tau)$  gegeben. Die Zirkulation ist ein Spezialfall des Linienintegrals: der Integrationsweg ist geschlossen. Beachte:  $\mathcal{L}$  hat eine Richtung



Beispiel:

Geschwindigkeitsfeld in einer Flüssigkeit

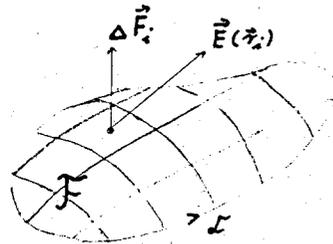


Stellen wir uns eine Röhre mit einem einheitlichen Querschnitt vor, die wie in b) in einer willkürlich geschlossenen Kurve verläuft. Würde die Flüssigkeit überall, außer in der Röhre, einfrieren, so würde die Flüssigkeit in der Röhre wie in c) zirkulieren.

Flächenintegral : 
$$\Phi = \iint_{\mathcal{F}} \vec{E} \cdot d\vec{F} = \iint_{B(u,v)} \vec{E}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$

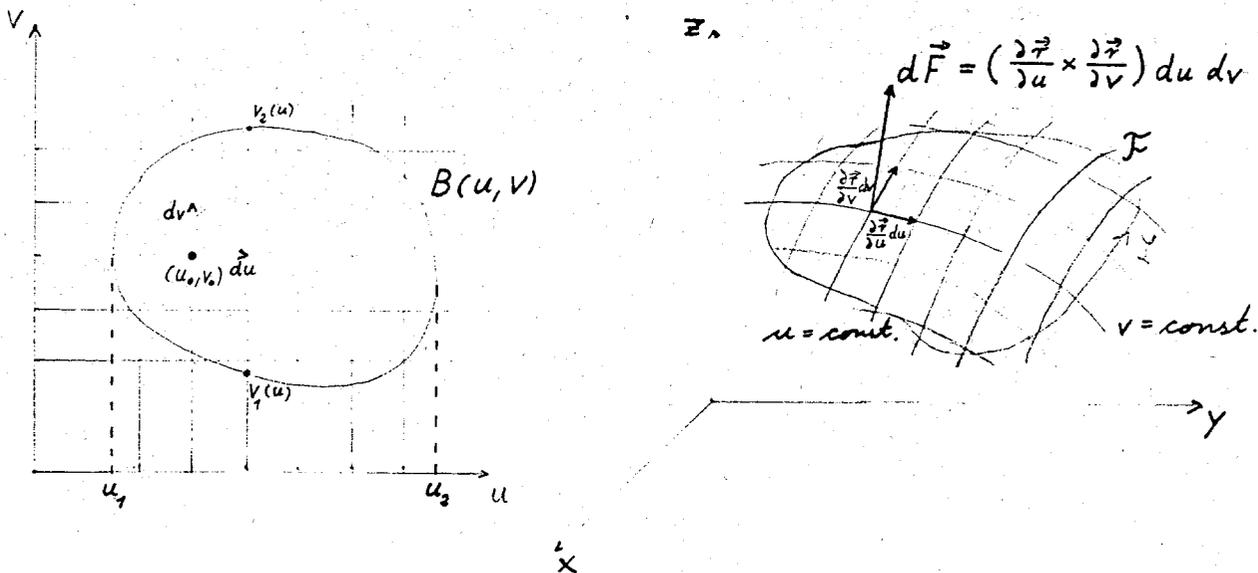
$\Phi$  heißt "Fluß des Felds  $\vec{E}$  durch die Fläche  $\mathcal{F}$ " und ist ein Maß dafür, wieviele  $\vec{E}$ -Feldlinien die Fläche durchsetzen.  $d\vec{F}$  zeigt in Richtung der Flächennormalen von  $\mathcal{F}$ . (Orientiertes Flächenstück). Die Richtung von  $d\vec{F}$  wird so gewählt, daß von seiner Spitze aus gesehen die Randkurve  $\mathcal{L}$  in mathematisch positivem Sinn durchlaufen wird. Es ist Konvention, daß  $d\vec{F}$  für geschlossene Flächen in das Außengebiet zeigt.  $\Phi$  ist der Grenzwert der Summe

$$\Phi = \lim \sum_i \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{F}_i$$



für den Fall beliebig guter Verfeinerung des Maschennetzes auf  $\mathcal{F}$ . Der Flächeninhalt  $|\Delta \vec{F}_i|$  strebt hierbei gegen Null.

Zur Auswertung von Flächenintegralen verschafft man sich - ganz entsprechend wie bei den Linienintegralen - zunächst die Parameterdarstellung  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  der Fläche  $\mathcal{F}$ . Hierdurch wird ein Punkt  $(u, v) \in B$  ein Punkt auf  $\mathcal{F}$  zugeordnet.



Den Koordinatenlinien  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  entspricht auf  $\mathcal{F}$  im allgemeinen ein Netz krummliniger, schiefwinkliger Parameterlinien. Inhalt und Richtung einer Masche auf  $\mathcal{F}$  entspricht dabei

$$d\vec{F} = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} du dv$$

sofern  $du dv$  das Flächenelement in der  $u$ - $v$  Ebene bezeichnet.  
Das verbleibende Integral über das ebene Flächenstück  $B(u, v)$   
berechnet man als iteriertes Integral

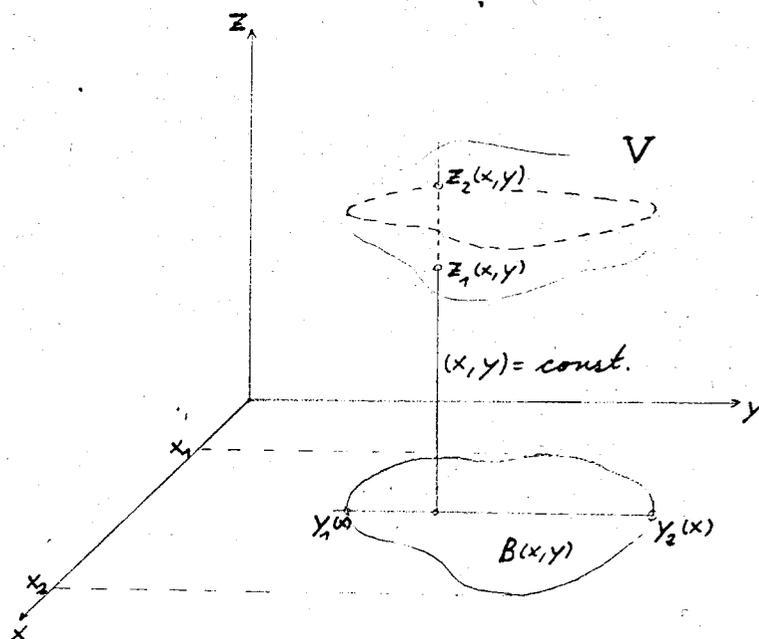
$$\iint_{B(u,v)} f(u,v) du dv = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(u,v) dv$$

wobei  $u_1, u_2$  und  $v_1, v_2$  durch die Randkurve  $\mathcal{L}$  des Bereichs  $B(u, v)$   
bestimmt werden.

Die praktische Ausrechnung eines Flächenintegrals wird außerordentlich vereinfacht, wenn die Parameterdarstellung von  $\mathcal{F}$  so gewählt wird, daß die Berandung von  $\mathcal{F}$  mit Linien  $u=\text{const}$ , oder  $v=\text{const}$  zusammenfällt.

Schließlich betrachten wir noch die Integration einer skalaren Funktion  $\phi(\vec{r})$  über ein dreidimensionales Volumen  $V$ .

Volumenintegral : 
$$\iiint \phi(\vec{r}) dV = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \phi(x, y, z)$$



$z_1(x, y)$ ,  $z_2(x, y)$  : Durchstoßpunkte der Geraden  $x=\text{const.}$   $y=\text{const.}$   
durch die das Volumen  $V$  einschließende Fläche  $\mathcal{F}$ .  
 $x, y$  liegen innerhalb des Bereichs  $B(x, y)$ , der  
die Projektion von  $V$  in die  $x$ - $y$  Ebene darstellt.

$y_1(x)$  ,  $y_2(x)$  : Schnittpunkte der Geraden  $x=\text{const}$  mit der Randkurve von  $B(x,y)$

$x_1$  ,  $x_2$  : Anfangs- und Endpunkt der Projektion von  $B(x,y)$  auf die  $x$ -Achse.

Die Substitutionsregel für Volumenintegrale lautet:

$$\iiint_V \phi(\vec{r}) dV = \iiint_{\tilde{V}} \phi(\vec{r}(u,v,w)) \left| \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) \right] \right| du dv dw$$

$\vec{r}=\vec{r}(u, v, w)$  bezeichnet die "Parameterdarstellung des Volumens"  $V$ , über die das Volumenstück  $\tilde{V}$  im  $u, v, w$  Raum auf  $V$  abgebildet wird. Das Spatprodukt

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

mit  $x=x(u, v, w)$  etc. heißt Funktionaldeterminante, (= Jacobi - Determinante.).

In vielen Fällen kann die Berechnung von Flächen und Volumenintegralen, durch Ausnutzen von Symmetrien des Integranden oder des Integrationsbereichs wesentlich vereinfacht werden. (Z.B. Benutzung von Zylinder oder Kugelkoordinaten).

Beispiel: Linienintegral:  $\int_{\mathcal{L}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

Vektorfeld:  $\vec{E}=(y, -x, x^2+y^2-z)$

Kurve: Gerade, welche die Punkte  $(0,0,0)$  und  $(1,2,3)$  verbindet:

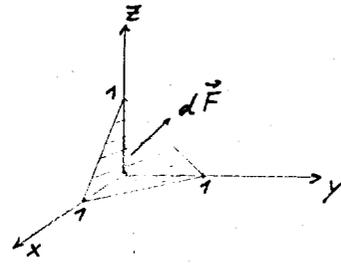
$$\mathcal{L} : \vec{r} = (\tau, 2\tau, 3\tau) , \quad 0 \leq \tau \leq 1 .$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 (y, -x, x^2+y^2-z) \cdot (1, 2, 3) d\tau = \int_0^1 (y - 2x + 3x^2 + 3y^2 - 3z) d\tau \\ &= \int_0^1 (15\tau^2 - 9\tau) d\tau = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Beispiel: Flächenintegral  $\iint \vec{E} \cdot d\vec{F}$

Vektorfeld  $\vec{E}(\vec{r}) = (y, x, z)$

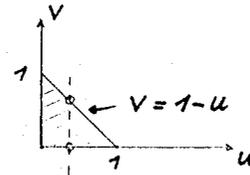
Integrationsgebiet: Ebene durch die 3 Punkte  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$  mit  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 : x+y+z=1$



Parameterdarstellung der Ebene:

$x=u, y=v, z=1-u-v$

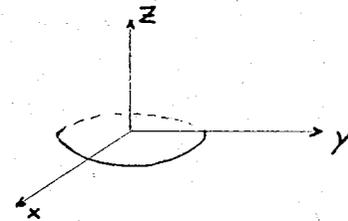
Flächenelemente  $dF=(1,1,1)dudv$



$$\begin{aligned} \iint \vec{E} \cdot d\vec{F} &= \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv (v, u, 1-u-v) \cdot (1, 1, 1) du dv \\ &= \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \cdot 1 = \int_0^1 du (1-u) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

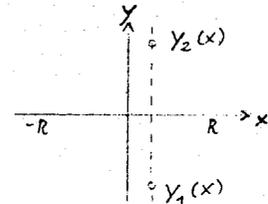
Beispiel: Volumenintegral  $\iiint_{HK} z dV$

HK bezeichnet eine Halbkugel vom Radius R über der x-y Ebene



Oberfläche der Halbkugel:  $x^2+y^2+z^2=R^2$

bez:  $z=0$  und  $x^2+y^2 \leq R^2$



$z_1(x,y)=0 \quad z_2(x,y)=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$

$y_1(x) = -\sqrt{R^2-x^2} \quad y_2(x) = +\sqrt{R^2-x^2} \quad x_1 = -R \quad x_2 = +R$

$$\begin{aligned} \iiint z dV &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} z dz = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \cdot \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} \\ &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \frac{1}{2} (R^2-x^2-y^2) = \int_{-R}^R dx \frac{1}{2} (R^2 y - x^2 y - \frac{1}{3} y^3) \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \\ &= \int_{-R}^R dx \frac{1}{2} \cdot 2 \left( (R^2-x^2)\sqrt{R^2-x^2} - \frac{1}{3} (R^2-x^2)^{3/2} \right) = \frac{2}{3} \int_{-R}^R dx (R^2-x^2)^{3/2} \\ &= \frac{4}{3} \int_0^R (R^2-x^2)^{3/2} dx = \frac{\pi}{4} \cdot R^4 \end{aligned}$$

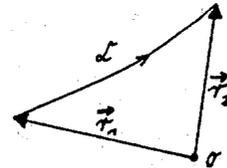
### § 3 Verknüpfungen von Feldern über Integralbildungen

Im folgenden werden wir zwei Felder über Integrale miteinander verknüpfen und daraus die Vektoroperationen, Gradient, Rotation und Divergenz gewinnen. Wir werden also genau den umgekehrten Weg gehen, wie er üblicherweise in der Vektoranalysis beschritten wird.

A. Verknüpfung eines Skalarfelds  $\phi(\vec{r})$  mit einem Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{r})$ ,  
Gradient eines Skalarfelds:  $\vec{A}(\vec{r}) = \text{grad } \phi(\vec{r})$

Verknüpfung : 
$$\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \int_{\mathcal{L}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

Bedingung : Diese Verknüpfung gilt für jede beliebige Kurve  $\mathcal{L}$ , welche die Punkte  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  verbindet.



Den differentiellen Zusammenhang von  $\vec{A}$  und  $\phi$  erhalten wir durch die spezielle Wahl von  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + (\Delta\vec{r})$ .  $\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$

Taylorentwicklung: 
$$\phi(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}) = \phi(\vec{r}_1) + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot \Delta z + \dots$$

Mittelwertsatz : 
$$\int_{\mathcal{L}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = A_x(\vec{r}_1) \cdot \Delta x + A_y(\vec{r}_1) \cdot \Delta y + A_z(\vec{r}_1) \cdot \Delta z$$

Da die geforderte Relation für jede beliebige Wahl von  $\Delta\vec{r}$  gilt erhalten wir:

$$\vec{A}(\vec{r}) \equiv \text{grad } \phi(\vec{r}) = \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

oder bei Benutzung des Nablaoperators  $\vec{\nabla}$ :

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Eigenschaften:

- 1.)  $\phi$  bestimmt eindeutig  $\vec{A}(\vec{r})$ , deshalb schreiben wir  $\vec{A} = \text{grad } \phi$ .
- 2.) Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $\vec{A}(\vec{r})$  als Gradient eines Skalarfelds darstellbar ist lautet:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$$

für jede beliebige geschlossene Kurve  $\mathcal{L}$ .

3.) Das Vektorfeld  $\vec{A} = \text{grad } \phi$  hat keine -ganz im Endlichen verlaufenden- geschlossenen Feldlinien. (Feldlinien können jedoch im Endlichen anfangen oder enden).

B Verknüpfung zweier Vektorfelder  $\vec{A}(\vec{r})$  und  $\vec{B}(\vec{r})$

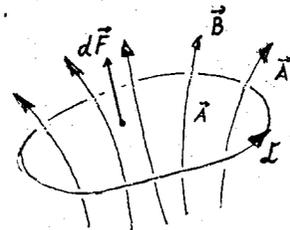
Rotation eines Vektorfelds:  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , Stoke'scher Satz

Nach A haben Gradientenfelder keine geschlossenen Feldlinien. Das Gegenstück hierzu sind Wirbelfelder, wo geschlossene Feldlinien auftreten. Ist  $\vec{A}(\vec{r})$  ein Kraftfeld, so leistet dies bei einem vollen Umlauf an einem Körper Arbeit:  $\oint \vec{A} d\vec{r} \neq 0$ . Die Dichte dieser Wirbelstärke wollen wir mit  $\vec{B}(\vec{r})$  bezeichnen.

Verknüpfung:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{F}(\mathcal{L})} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}$$

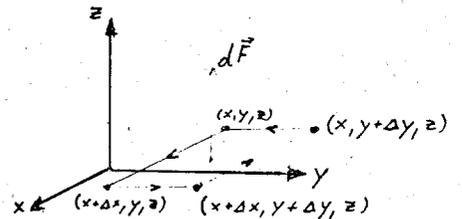
(Stoke'scher Satz)



Bedingung: Diese Verknüpfung gilt für jede beliebige (orientierbare) Fläche  $\mathcal{F}$ , die von der (geschlossenen) Kurve  $\mathcal{L}$  berandet wird.

Zur Berechnung der Komponenten  $\vec{B}_{\vec{n}}(\vec{r})$  von  $\vec{B}(\vec{r})$  in einer festen vorgegebenen Richtung  $\vec{n}$ , wählen wir ein kleines, ebenes Flächenstück  $\Delta \vec{F} = |\Delta \vec{F}| \cdot \vec{n}$ , und wenden auf die rechte Seite der Verknüpfungsgleichung den Mittelwertsatz der Integralrechnung an.

$$\vec{B}_{\vec{n}}(\vec{r}) = \lim_{\Delta \vec{F} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\mathcal{L}} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{s}}{\Delta F} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\Delta F)$$



Wir führen dies explizit für die z-Komponente durch

$$\Delta \vec{F} = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \vec{e}_z$$

Mittelwertsatz:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = A_x(\bar{x}, y, z) \cdot \Delta x + A_y(x + \Delta x, \bar{y}, z) \cdot \Delta y - A_x(\bar{x}, y + \Delta y, z) \cdot \Delta x - A_y(x, \bar{y}, z) \cdot \Delta y$$

mit  $x \leq \bar{x} \leq x + \Delta x$ ,  $y \leq \bar{y} \leq y + \Delta y$  Da wir die Zirkulation von  $\vec{A}$  nur bis zur Ordnung  $\Delta x \cdot \Delta y$  benötigen, dürfen wir  $\bar{x} = x$  und  $\bar{y} = y$  setzen.

Taylorentwicklung:

$$A_x(x, y + \Delta y, z) = A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \dots$$

z-Komp. von

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y}$$

Insgesamt erhalten wir:

Rotation von  $\vec{A}$

$$\vec{B}(\vec{r}) \equiv \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Eigenschaften:

1.)  $\vec{A}(\vec{r})$  bestimmt eindeutig  $\vec{B}(\vec{r})$ , daher schreiben wir  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ .

Beweis:

Angenommen es gäbe zwei Felder  $\vec{B}_1 \neq \vec{B}_2$  mit der geforderten Verknüpfung. Subtraktion beider Gleichungen liefert dann:

$$\oint_{\mathcal{F}} (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot d\vec{F} = 0$$

für jede beliebige Fläche  $\mathcal{F}$ . Hieraus folgt  $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$ .

2.) Ist  $\vec{A} = \text{grad } \phi$ , so ist  $\vec{B} = \text{rot grad } \phi \equiv 0$  (da  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint \text{grad } \phi \cdot d\vec{s} = 0 \sim \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ )

3.) Da eine geschlossene Fläche keine Randkurve hat, ist nach der Verknüpfung  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0$ , d.h. alle Feldlinien von  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  -soweit sie ganz im Endlichen verlaufen- sind geschlossen, oder sie beginnen und enden im Unendlichen.

4.) Jede geschlossene  $\vec{A}$ -Feldlinie ist mit  $\vec{B}$ -Linien "verkettet".

### C Verknüpfung eines Skalarfelds $f(\vec{r})$ mit einem Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r})$

Divergenz eines Vektorfelds :  $f(\vec{r}) = \text{div } \vec{B}(\vec{r})$  : Gauss'scher Satz

Alle Linien des Feldes  $\text{rot } \vec{A}$  sind geschlossen. Dagegen hat  $\text{grad } \phi$  keine geschlossenen Feldlinien (wenigstens soweit sie ganz im Endlichen verlaufen), sie können aber im Endlichen anfangen oder enden. Ein Maß für diese Quell- bzw. Senkendichte sei  $f(\vec{r})$ . (Je nach dem  $f(\vec{r}) > 0$  oder  $< 0$ .)

Verknüpfung:

(Gauss'scher Satz)

$$\oint_{\mathcal{F}} \vec{B} \cdot d\vec{F} = \iiint_{V(\mathcal{F})} f(\vec{r}) dV$$

Bedingung: Diese Verknüpfung gilt für jedes beliebige Volumen  $V$  mit der Oberfläche  $\mathcal{F}$ .

Zur Berechnung von  $f(\vec{r})$  bei vorgegebenen  $\vec{B}(\vec{r})$  wählen wir ein Volumen  $\Delta V \rightarrow 0$  und bilden:

$$f(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}}{\Delta V} \quad \text{mit } F = F(\Delta V)$$

Wir führen diese Rechnung explizit für einen kleinen Quader durch:

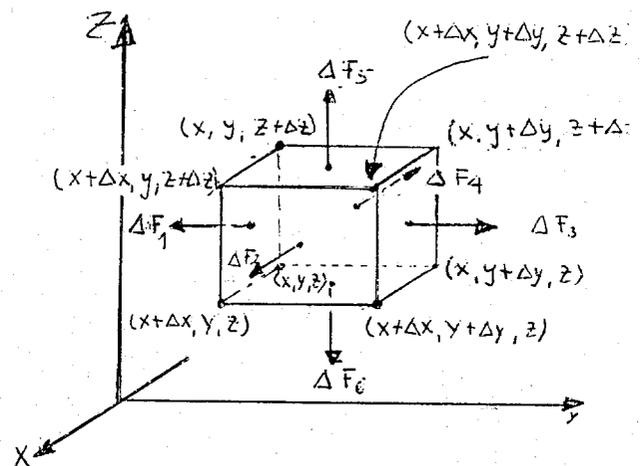
Volumenelement  $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

Flächenelement  $\Delta \vec{F}_3 = -\Delta \vec{F}_1 = \Delta x \cdot \Delta z \cdot \vec{e}_y$

$\Delta \vec{F}_2 = -\Delta \vec{F}_4 = \Delta y \cdot \Delta z \cdot \vec{e}_x$

$\Delta \vec{F}_5 = -\Delta \vec{F}_6 = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \vec{e}_z$

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{F} &= (-B_y(x,y,z) + B_y(x,y+\Delta y,z)) \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \\ &+ (B_x(x+\Delta x,y,z) - B_x(x,y,z)) \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \\ &+ (B_z(x,y,z+\Delta z) - B_z(x,y,z)) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \\ &= \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \end{aligned}$$



$$f(\vec{r}) = \text{div } \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r})$$

Divergenz von  $\vec{B}(\vec{r})$   $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$

Eigenschaften:

1.)  $\vec{B}(\vec{r})$  bestimmt eindeutig das Skalarfeld  $f(\vec{r})$ , welches die Quell- bzw. Senkenstärke von  $\vec{B}(\vec{r})$  angibt.

2.) Ist  $\vec{B}$  als Rotation eines anderen Felds darstellbar,  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , so gilt

$$\text{div rot } \vec{A} \equiv 0$$

3.) Laplaceoperator:

$$\Delta f(\vec{r}) \equiv \text{div grad } f(\vec{r}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Achtung:

Bei den Integralverknüpfungen in A, B, C sind wir etwas leichtfertig über die mathematischen Voraussetzungen hinweggegangen. Sämtliche

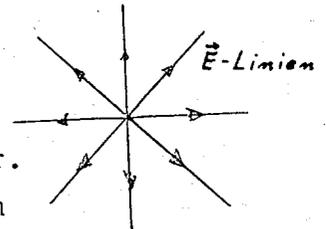
Felder müssen in allen Punkten des Raumes eindeutig definiert sein. Für die Operationen Gradient, Rotation und Divergenz ist außerdem Differenzierbarkeit Voraussetzung. Insbesondere dürfen keine Singularitäten auftreten. Ist dies dennoch der Fall, so müssen diese Singularitäten, durch "Aussparen" der betreffenden Raumbereiche ausgeschlossen werden. (Mehrfach zusammenhängende Gebiete).

Zwei Beispiele mögen dies veranschaulichen.

1. Coulombfeld:

Für  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$  ist  $\text{div} \vec{E} \equiv 0$  für  $\vec{r} \neq 0$

Bei  $\vec{r} = 0$  ist  $\vec{E}(\vec{r})$  singularär und nicht differenzierbar. Für eine geschlossene Kugelfläche mit dem Radius R um  $\vec{r} = 0$  ist:

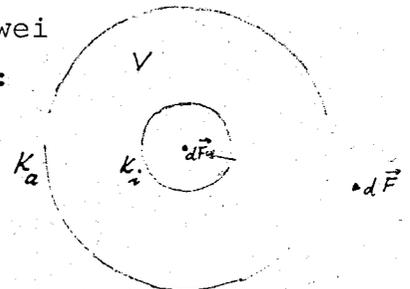


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{F} = \iint \frac{1}{R^2} \cdot |dF| = \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi \quad \text{unabhängig von R.}$$

$\iiint (\text{div} \vec{E} dV)$  kann man nicht ohne weiteres berechnen, da  $f(\vec{r})$  für den Punkt  $\vec{r} = 0$ , der im Integrationsvolumen liegt, nicht erklärt ist.

Um den Gauss'schen Satz aufrecht zu erhalten, müssen wir deshalb den Punkt  $\vec{r}=0$  aussparen. Das Volumen wird nun von zwei konzentrischen Kugelflächen berandet und es ist:

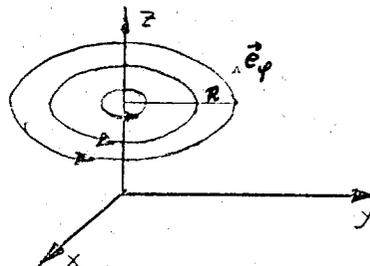
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{F} = \oint_{K_a} \vec{E} \cdot d\vec{F} + \oint_{K_i} \vec{E} \cdot d\vec{F} = 4\pi - 4\pi = 0$$



2. "Potentialwirbel".  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  mit  $\vec{\omega}(\rho) = \frac{\Gamma_0}{2\pi \rho^2} \cdot \vec{e}_z$

$\vec{v}(\vec{r})$  beschreibt das (axialsymmetrische) Geschwindigkeitsfeld eines Mediums, das mit der lokalen Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}(\rho)$  um die z-Achse rotiert.  $\rho =$  Abstand eines Punkts vor der z-Achse:  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\vec{v} = \frac{\Gamma_0}{2\pi \rho} \cdot \frac{(-y, x, 0)}{\rho} = \frac{\Gamma_0}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi$$



a)  $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint \frac{\Gamma_0}{2\pi} d\varphi = \Gamma_0$

unabhängig vom Radius R des Kreises, der die Drehachse umschließt.

b)  $\vec{v}(\vec{r})$  hat geschlossene Feldlinien,  $\vec{v} = \text{rot} \vec{A}$

(So ist eine beliebiger, fester Abstand  $A = -\frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \vec{e}_z$ )

c) Trotz den Eigenschaften a), b), ist  $\text{rot} \vec{v} = 0$ ,

d.h. das Feld  $\vec{v}(\vec{r})$  besitzt ein Potential!

( $\varphi =$  Drehwinkel,  $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .)

Diese kuriose mathematische Eigenschaft des "Potentialwirbels" liegt daran, daß  $\vec{v}(\vec{r})$  bei  $x=0, y=0$  eine wesentliche Singularität hat,  $\vec{A}(\vec{r})$  im Nullpunkt nicht differenzierbar ist, und  $\phi(\vec{r})$  keine eindeutige Funktion des Orts ist. ( $\phi(\varphi=0) \neq \phi(\varphi=2\pi)$ ). Eine mögliche physikalische Realisierung dieses Felds wird durch das Magnetfeld eines dünnen stromdurchflossenen Drahtes gegeben.

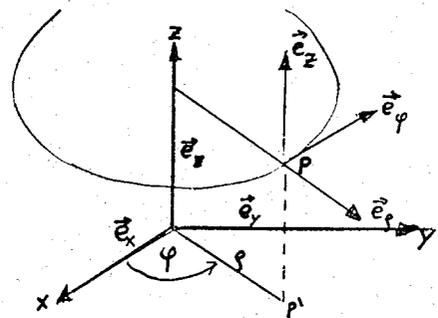
#### § 4 Kugel und Zylinderkoordinaten

In vielen Fällen legt es die Symmetrie physikalischer Probleme nahe, von den kartesischen Koordinaten zu Koordinatensystemen überzugehen, mit denen sich die Symmetrie in besonders einfacher Weise ausnutzen läßt. Für uns kommen in erster Linie Zylinder und Kugelkoordinaten in Betracht.

##### Zylinderkoordinaten

Ein Punkt P wird durch Angabe von  $(\rho, \varphi, z)$  festgelegt.

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= \rho \sin \varphi & \varphi &= \arctg \frac{y}{x} & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ z &= z & z &= z \end{aligned}$$



Tangentenvektoren  $\vec{e}_\rho$ ,  $\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{e}_z$  erhalten wir

durch:

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

Der Faktor  $\frac{1}{\rho}$  bei  $\vec{e}_\varphi$  wurde hinzugefügt, damit  $\vec{e}_\varphi$ , ebenso wie die anderen Vektoren  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$ ,  $\vec{e}_\rho$  die Länge 1 hat.  $\vec{e}_\rho$ ,  $\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{e}_z$  sind orthogonal und bilden in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges Basissystem, nach dem sich ein im Punkt P angehefteter Vektor zerlegen läßt.

$$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$$

Im Gegensatz zum kartesischen System hängen die Tangenten - Einheitsvektoren  $\vec{e}_\rho$ ,  $\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{e}_z$  jedoch explizit von der Koordinate  $\varphi$  des Punkts P ab. Deshalb muß man bei der Angabe von  $\vec{A}$  durch ein Wertetripel  $(A_\rho, A_\varphi, A_z)$  aufpassen, auf welches System sich diese Angabe bezieht.

Zur Berechnung von Integralen benötigen wir ferner

$$\text{Linielement } d\vec{r} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z$$

$$\text{Funktionaldeterminante: } \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \rho \quad \text{d. d.} \quad dV = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot dz$$

Zur Übung berechnen wir die Komponenten des Gradienten und die  $\rho$ -Komponente der Rotation in Zylinderkoordinaten.

Wir gehen aus von

$$\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_1, \vec{r}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

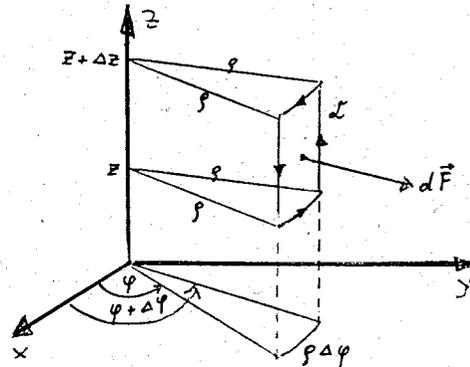
mit  $r_1 = (\rho, \varphi, z)$  und  $r_2 = (\rho + \Delta\rho, \varphi + \Delta\varphi, z + \Delta z)$ . Die linke Seite dieser Gleichung wird Taylorentwickelt; Zur Auswertung des Integrals benutzen wir die Orthogonalität der Basisvektoren

$$\frac{\partial\phi(\rho, \varphi, z)}{\partial\rho} \Delta\rho + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \Delta\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z} \Delta z + \dots = A_\rho \Delta\rho + \rho A_\varphi \Delta\varphi + A_z \Delta z$$

Da  $\Delta\rho, \Delta\varphi, \Delta z$  beliebig wählbar sind, folgt

$$\vec{A} \equiv \text{grad}(\phi, \varphi, z) = \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Zur Berechnung von  $(\text{rot}\vec{A})_\rho$  gehen wir vom Stoke'schen Satz aus und wählen die in der nebenstehenden Abbildung gezeichnete geschlossene Kurve. (Richtungssinn beachten!)



$$\oint_{\vec{r}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = -A_z(\rho, \varphi, z + \Delta z) \Delta z - A_\varphi(\rho, \varphi + \Delta\varphi, z + \Delta z) \cdot \rho \cdot \Delta\varphi +$$

$$+ A_z(\rho, \varphi + \Delta\varphi, z) \Delta z + A_\varphi(\rho, \varphi, z) \cdot \rho \cdot \Delta\varphi$$

$$\iint_{\vec{r}} \vec{B} \cdot d\vec{F} = B_\rho \cdot \rho \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta z$$

Taylorentwicklung von  $A_z(\rho, \varphi + \Delta\varphi, z)$  und  $A_\varphi(\rho, \varphi + \Delta\varphi, z + \Delta z)$  liefert

$$B_\rho = (\text{rot}\vec{A})_\rho = -\frac{\partial A_\varphi(\rho, \varphi, z)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z(\rho, \varphi, z)}{\partial\varphi}$$

Kugelkoordinaten

Ein Punkt P wird durch Angabe von  $(r, \vartheta, \varphi)$  festgelegt. Die Umrechnungsformel von kartesischen und Kugelkoordinaten lauten:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

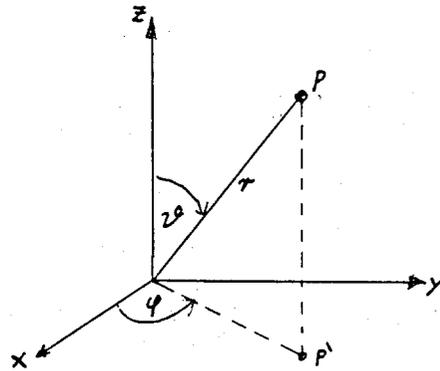
$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad r > 0$$

$$\vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad 0 \leq \vartheta < \pi$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$



Die Einheitsvektoren in Tangentenrichtung der Koordinatenlinien sind

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = \cos \varphi \sin \vartheta \vec{e}_x + \sin \varphi \sin \vartheta \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \cos \varphi \cos \vartheta \vec{e}_x + \sin \varphi \cos \vartheta \vec{e}_y - \sin \vartheta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$$

Im allgemeinen haben die an zwei verschiedenen Punkten konstruierten Systeme von orthonormierten Vektoren nicht die gleiche Orientierung.

Die Komponentenzzerlegung eines beliebigen Vektors  $\vec{A}$  bezüglich des Basissystems  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$  erhalten wir durch:

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\vartheta \vec{e}_\vartheta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$A_r = (\vec{A} \cdot \vec{e}_r) = A_x \sin \vartheta \cos \varphi + A_y \sin \vartheta \sin \varphi + A_z \cos \vartheta$$

$$A_\vartheta = (\vec{A} \cdot \vec{e}_\vartheta) = A_x \cos \vartheta \cos \varphi + A_y \cos \vartheta \sin \varphi - A_z \sin \vartheta$$

$$A_\varphi = (\vec{A} \cdot \vec{e}_\varphi) = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi$$

Die  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi \longleftrightarrow \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  Relationen lassen sich nach  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  auflösen:

$$\vec{e}_x = \vec{e}_r \cdot \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{e}_\vartheta \cdot \cos \vartheta \cos \varphi - \vec{e}_\varphi \sin \varphi$$

$$\vec{e}_y = \vec{e}_r \cdot \sin \vartheta \sin \varphi + \vec{e}_\vartheta \cdot \cos \vartheta \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \varphi$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cdot \cos \vartheta - \vec{e}_\vartheta \sin \vartheta$$

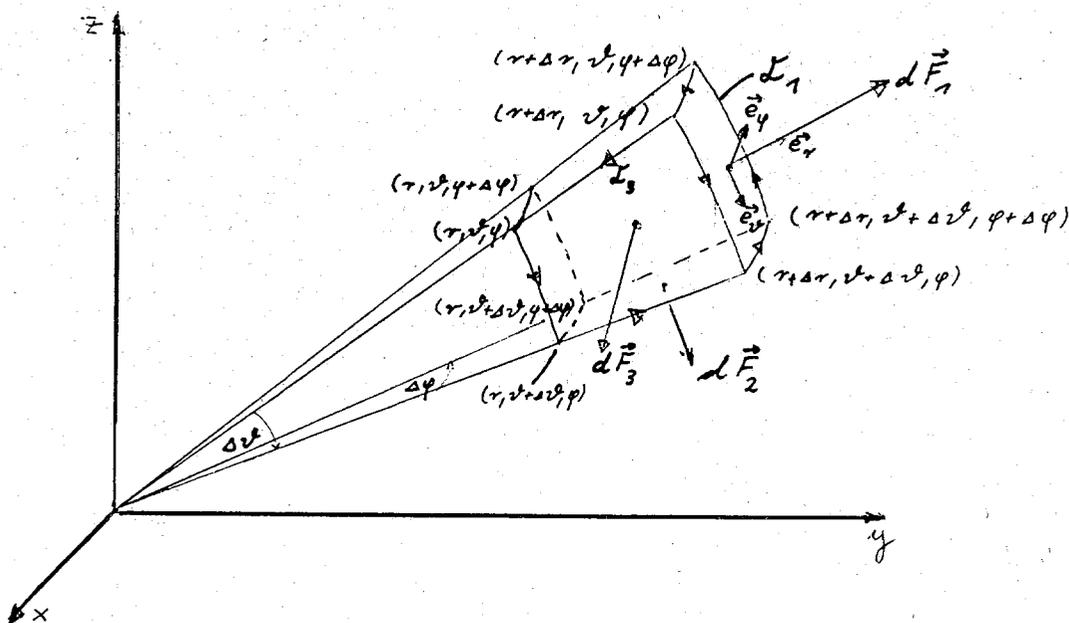
Weiterhin benötigen wir noch das Linienelement und die Funktionaldeterminante:

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\vartheta\vec{e}_\vartheta + r \sin\vartheta d\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = r^2 \sin\vartheta \quad \text{d. h. } dV = r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Die Komponenten von Gradient, Rotation und Divergenz lassen sich über die oben angegebenen Transformationsformeln für die Vektorkomponenten aus den kartesischen Komponenten berechnen. Dies ist aber ziemlich umständlich, denn man muß dann noch die partiellen Ableitungen, wie z. B.  $\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y}$  etc. auf  $r, \vartheta, \varphi$  transformieren. Schneller ist der direkte Weg über die Integralsätze. Als Beispiel berechnen wir die Komponenten der Rotation:

Stoke'scher Satz: 
$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{R}(\mathcal{L})} \vec{B} \cdot d\vec{F}$$



Weg  $\mathcal{L}_1$ : 
$$\oint_{\mathcal{L}_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} = A_\varphi(r+\delta r, \vartheta+\delta\vartheta, \varphi) r \sin(\vartheta+\delta\vartheta) \Delta\varphi - A_\varphi(r+\delta r, \vartheta, \varphi+\delta\varphi) r \delta\vartheta - A_\varphi(r+\delta r, \vartheta, \varphi) r \sin\vartheta \Delta\varphi + A_\varphi(r+\delta r, \vartheta, \varphi) r \delta\vartheta$$

Taylorentwicklung von  $A_\varphi$  nach  $\vartheta$  und  $A_\varphi$  nach  $\varphi$  liefert

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial\vartheta} (A_\varphi(r+\delta r, \vartheta, \varphi) \sin\vartheta) - \frac{\partial}{\partial\varphi} A_\varphi(r+\delta r, \vartheta, \varphi) \right\} r d\vartheta d\varphi$$

Terme der Form  $\Delta r \sin \vartheta$  wurden gegen Terme der Form  $r \sin \vartheta$  vernachlässigt

$$\oint_{F_1} \vec{B} \cdot d\vec{F} = B_r(r+\Delta r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

Vergleich beider Integrale liefert: ( $\Delta r$  kann weggelassen werden.)

$$B_r(r, \vartheta, \varphi) = (\text{rot } \vec{A})_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right)$$

Auswertung der Integrale über die Wege  $L_2$  und  $L_3$  liefert analog zu  $L_1$  die  $\vartheta$  und  $\varphi$  Komponenten.

Der Übung halber berechnen wir noch die Divergenz eines Vektorfelds in Kugelkoordinaten. Dazu gehen wir direkt vom Gauß'schen Satz aus:

$$\oint_{F} \vec{B} \cdot d\vec{F} = \iiint f(\vec{r}) dV$$

und integrieren über den oben gezeichneten infinitesimalen Kugelausschnitt.

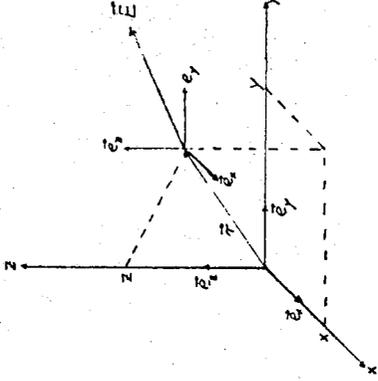
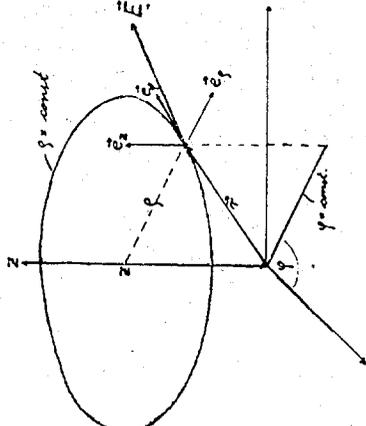
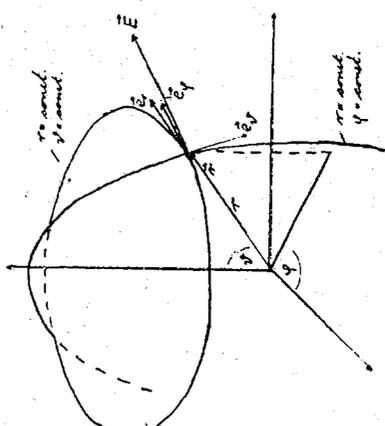
$$\begin{aligned} \oint_{F} \vec{B} \cdot d\vec{F} &= B_r(r+\Delta r, \vartheta, \varphi) \cdot (r+\Delta r)^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi - B_r(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \\ &+ B_\vartheta(r, \vartheta+\Delta \vartheta, \varphi) \cdot r \sin(\vartheta+\Delta \vartheta) d\varphi dr - B_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) r \sin \vartheta d\varphi dr + \\ &+ B_\varphi(r, \vartheta, \varphi+\Delta \varphi) r d\vartheta dr - B_\varphi(r, \vartheta, \varphi) r d\vartheta dr \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r(r, \vartheta, \varphi)) \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta B_\vartheta(r, \vartheta, \varphi)) r d\varphi dr + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi(r, \vartheta, \varphi) r d\vartheta dr \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } f(\vec{r}) \equiv \text{div } \vec{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 B_r(r, \vartheta, \varphi))}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta B_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}$$

Zur Demonstration wie sich die Auswertung eines Volumenintegrals durch Ausnutzen von Symmetrien vereinfachen kann, berechnen wir das in § 2 angegebene Integral unter Benutzung von Kugelkoordinaten HK bezeichnet das Volumen einer Halbkugel vom Radius R über der x-y-Ebene.

$$\begin{aligned} \iiint_{HK} z dV &= \iiint_{HK} z r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{1}{4} R^4 \left( \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \Big|_0^{\pi/2} \right) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} R^4 \end{aligned}$$

Die Vereinfachung rührt daher, daß die Grenzen der 3 Integrale nicht voneinander abhängen.

Koordinaten	geometrische Bedeutung	Vektor Komponenten	Differentialoperationen
Kartesisch $(x, y, z)$		$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$	$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$ $\text{rot } \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$ $\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$ $\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$
Zylinder $(\rho, \varphi, z)$ $x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $z = z$ $0 \leq \varphi < 2\pi$ $\rho > 0$		$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$ $\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$ $\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$ $\vec{e}_z = \vec{e}_z$	$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$ $\text{rot } \vec{B} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left( \frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \left( \frac{\partial B_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$ $\text{div } \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$ $\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$
Kugel $(r, \vartheta, \varphi)$ $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$ $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$ $z = r \cos \vartheta$ $0 \leq \varphi < 2\pi$ $0 \leq \vartheta < \pi$ $r > 0$		$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\vartheta \vec{e}_\vartheta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$ $\vec{e}_r = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z$ $\vec{e}_\vartheta = \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \vartheta \vec{e}_z$ $\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \sin \vartheta \vec{e}_x + \cos \varphi \sin \vartheta \vec{e}_y$	$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta$ $\text{rot } \vec{B} = \left[ \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta B_\varphi) - \frac{\partial B_\varphi}{\partial \vartheta} \right) \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi + \left[ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\vartheta$ $\text{div } \vec{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta B_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \vartheta B_\varphi)$ $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right)$

II-18

Zusammenstellung von wichtigen Formeln

Taylor'sche Formel (Entwicklung von  $f(x,y,z)$  um den Punkt  $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ )

$$f(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0) + \Delta \vec{r} \cdot \text{grad} f(\vec{r}_0) + \frac{1}{2!} (\Delta \vec{r} \cdot \text{grad})(\Delta \vec{r} \cdot \text{grad}) f(\vec{r}_0) + \dots (\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \Delta x \frac{\partial}{\partial x_0} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y_0} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z_0} \right]^n f(x_0, y_0, z_0)$$

$\Delta x = x - x_0$   
 $\Delta y = y - y_0$   
 $\Delta z = z - z_0$

totales Differential einer Funktion  $f(x,y,z)$

$$df = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} dz \equiv \text{grad} f \cdot d\vec{r}$$

Umformungen

- 1)  $\text{grad} \{f_1(\vec{r}) \cdot f_2(\vec{r})\} = f_1(\vec{r}) \text{grad} f_2(\vec{r}) + f_2(\vec{r}) \text{grad} f_1(\vec{r})$
- 2)  $\text{grad} \{\vec{V}_1(\vec{r}) \cdot \vec{V}_2(\vec{r})\} = (\vec{V}_1 \nabla) \vec{V}_2 + (\vec{V}_2 \nabla) \vec{V}_1 + \vec{V}_1 \times \text{rot} \vec{V}_2 + \vec{V}_2 \times \text{rot} \vec{V}_1$
- 3)  $\text{div} \{f(\vec{r}) \vec{V}(\vec{r})\} = f \text{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \text{grad} f$
- 4)  $\text{div} \{\vec{V}_1(\vec{r}) \times \vec{V}_2(\vec{r})\} = \vec{V}_2 \cdot \text{rot} \vec{V}_1 - \vec{V}_1 \cdot \text{rot} \vec{V}_2$
- 5)  $\text{div grad} F(\vec{r}) = \Delta F(\vec{r})$
- 6)  $\text{div rot} \vec{V}(\vec{r}) = 0$
- 7)  $\text{rot} \{f(\vec{r}) \vec{V}(\vec{r})\} = f \text{rot} \vec{V} + (\text{grad} f) \times \vec{V}$
- 8)  $\text{rot} \{\vec{V}_1(\vec{r}) \times \vec{V}_2(\vec{r})\} = (\vec{V}_2 \nabla) \vec{V}_1 - (\vec{V}_1 \nabla) \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \text{div} \vec{V}_2 - \vec{V}_2 \text{div} \vec{V}_1$
- 9)  $\text{rot rot} \vec{A} = \text{grad div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$

Nabla Operator  $\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$  (Vektor Operator)

Vektorgradient  $(\vec{A} \cdot \nabla) = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$  (skalärer Operator)

Rechenregeln für  $\nabla(ABC, \dots)$

A, B, C können skalare oder vektorielle Größen sein.  $\nabla(\dots)$

kann Gradient, Divergenz oder Rotation bedeuten, je nachdem ob zwischen  $\nabla$  und  $(\dots)$  kein Zeichen, ein  $\cdot$ , oder  $\times$  steht.

1. Schritt:  $\nabla(ABC, \dots) \Rightarrow \nabla(\overset{\downarrow}{A}BC, \dots) + \nabla(A\overset{\downarrow}{B}C, \dots) + \nabla(AB\overset{\downarrow}{C}, \dots) + \dots$

Der Pfeil gibt an, auf welchen Faktor  $\nabla$  angewendet werden soll.

2. Schritt:     $\downarrow$   
 Forme ABC... nach den Regeln der Vektorrechnung  
 so um, daß die mit  $\downarrow$  versehenen Faktoren direkt  
 hinter  $\nabla$  stehen    z.B.  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ ;  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$  etc

3. Schritt:     $\downarrow$   
 interpretiere  $\nabla \vec{B}$ :  $\nabla B = \text{grad } B$ ;  $\nabla \cdot \vec{B} = \text{div } \vec{B}$ ,  
 $\nabla \cdot B = (\text{grad } B) \cdot$ ,  $\nabla \times \vec{B} = \text{rot } \vec{B}$ ,    (aufpassen!)

Beispiel:  $\text{div}(\phi \vec{A}) \equiv \nabla \cdot (\phi \vec{A}) \Rightarrow \nabla \cdot (\phi \vec{A}) + \nabla \cdot (\vec{A} \phi) = \nabla \cdot (\phi \vec{A}) + \nabla \cdot (\vec{A} \phi)$   
 $= (\nabla \phi) \cdot \vec{A} + (\nabla \cdot \vec{A}) \phi \equiv (\text{grad } \phi) \cdot \vec{A} + (\text{div } \vec{A}) \phi$

Neben den Integralsätzen von Gauß und Stokes gibt es einen  
 weitem Integralsatz, der im Kapitel über Materie im elektromg.  
 Feld gebraucht wird.

$$\iiint \text{rot } \vec{A} \, dV = \oint d\vec{F} \times \vec{A} = - \oint \vec{A} \times d\vec{F}$$

weitere Formeln:

## 6 Dirac-Funktion

Unser Ziel ist es, die Ladungsverteilung einer Punktladung formal genau so zu behandeln wie eine ausgedehnte Ladungsverteilung. Für eine Punktladung  $Q$  bei  $\mathbf{r} = 0$  schreiben wir:

$$\rho(\mathbf{r}) = Q \delta(\mathbf{r}), \quad \int \int \int \delta(\mathbf{r}) dV = 1$$

Die Funktion  $\delta(\mathbf{r})$  heisst Dirac'sche Delta Funktion.  $\delta(\mathbf{r})$  soll – mit Ausnahme von  $\mathbf{r} = 0$  – überall gleich Null sein. Um eine endliche Ladung  $Q$  zu beschreiben, müsste dann  $\delta(0) = \infty$  sein, sodass das Integral darüber gleich 1 ist. Die Krux an der Sache ist, dass es eine derartige Funktion im strengen Sinn nicht gibt. Das macht aber überhaupt nichts, denn wir werden  $\delta(\mathbf{r})$  lediglich als Kurzbezeichnung für eine Funktion auffassen, die nur in einem winzig kleinen Raumbereich ungleich Null ist, und deren Integral den Wert 1 hat. Der Vorteil der Deltafunktion besteht u.a. darin, dass wir nun in der Lage sind  $1/r$  formal bei  $\mathbf{r} = 0$  zu differenzieren und, dass der Gauss'sche Satz in der Form von II.3 gilt.

Wir betrachten zunächst den 1-dimensionalen Fall.

Die definierende Eigenschaft der Deltafunktion besteht in der Relation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad \text{für jede bei } x=0 \text{ stetige Funktion } f(x)$$

Diese und nur diese Relation werden wir im folgenden benutzen. Statt  $\mp\infty$  können auch beliebige negative/positive untere/obere Grenzen im Integral stehen.

Daraus abgeleitete Eigenschaften und Analogien sind:

a) Die Deltafunktion ist eine Verallgemeinerung des Kronecker-Symbols auf "kontinuierliche Indizes".

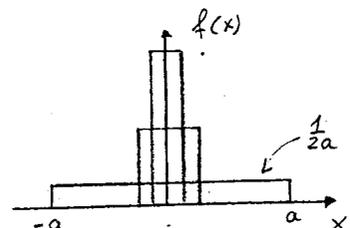
diskrete Indizes:  $f_k = \sum_j f_j \delta_{j,k}$

kontinuierliche "Indizes":  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x' - x) dx'$

b)  $\delta(x)$  kann als "Grenzwert" (der aber im üblichen Sinn nicht existiert) von Funktionenfolgen  $\delta_a(x)$  aufgefasst werden, wobei das Integral jedes einzelnen Glieds dieser Folge gleich 1 ist und die Funktionen sich auf den Punkt 0 zusammenziehen.

Z. B.

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases}$$



c) Rechenregeln:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$x \cdot \delta(x) = 0$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} (\delta(x+a) + \delta(x-a))$$

$$\int \delta(x-a) \delta(x-b) dx = \delta(a-b)$$

$$f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x-a)$$

Diese Eigenschaften sind so zu verstehen, daß jeweils die beiden Seiten einer Gleichung unter einem Integral über  $x$  äquivalent sind.

d) Mit Hilfe der "uneigentlichen Funktion"  $\delta(x)$  kann man z.B. auch die Sprungfunktion  $\theta(x)$  bei  $x=0$  differenzieren!

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x)$$

e) Die Deltafunktion läßt sich (formal) differenzieren, wobei  $\delta'(x)$  folgende Bedeutung hat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \delta'(y-x) dy = -f'(x)$$

Entsprechend für  $\delta''(x)$  etc. Beweis durch partielle Integration.

f) Die 3dimensionale  $\delta(\vec{r})$  - Funktion läßt sich auffassen als

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$$

## § 7 LEGENDRE-Polynome

Ba einzelne Multipole durch völlig verschiedene Ladungsverteilungen erzeugt werden können, müssen die Multipolpotentiale  $\phi_n(\vec{r})$  für  $r \neq 0$  Lösungen der LAPLACE-Gleichung sein.

$$\phi_n(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_n}{r^{n+1}} \cdot P_n(\cos\vartheta) \quad \text{mit} \quad \Delta \phi_n(\vec{r}) = 0$$

Nach Umschreiben von  $\Delta$  gewinnen wir hieraus die Differentialgleichung für die LEGENDRE-Polynome.

$$\Delta \phi_n(r, \vartheta) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin^2 \vartheta \frac{\partial \phi(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$n(n+1) P_n(\cos \vartheta) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin^2 \vartheta \cdot \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right) = 0$$

Substitution:  $x = \cos \vartheta$      $P_n(x) = y$

LEGENDRE'sche Differentialgleichung:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \cdot y'(x) \right) + n(n+1)y(x) = 0$$

Die LEGENDRE'sche Differentialgleichung und speziell die LEGENDRE'schen Polynome haben eine Reihe interessanter Eigenschaften:

- 1) Die LEGENDRE'sche Differentialgleichung hat für ganzzahlige  $n$  ( $= 0, 1, 2, 3, \dots$ ) die Polynomlösung  $P_n(x)$ .
- 2) Die zweite, von  $P_n(x)$  linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung ist bei  $x = \pm 1$  singular, z.B. ist für  $n=0$ :

$$y = C_1 \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C_2$$

- 3) Die LEGENDRE-Polynome zu verschiedenen (ganzzahligen)  $n$  sind im Intervall  $(-1, 1)$  orthogonal.

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) \cdot P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$$

- 4) Die Funktionen  $P_n(x)$  bilden ein im Intervall  $(-1, 1)$  vollständiges Funktionensystem, d.h. jede in  $(-1, 1)$  definierte, stetige Funktion  $f(x)$  läßt sich nach den  $P_n(x)$  entwickeln.

Beweis zu 3):

$$n(n+1) P_m(x) + \frac{d}{dx} [(1-x^2) P_m'(x)] = 0$$

$$m(m+1) P_m(x) + \frac{d}{dx} [(1-x^2) P_m'(x)] = 0$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit  $P_m(x)$ , der zweiten mit  $P_n(x)$ , Subtraktion und Integration führt auf:

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx + \int_{-1}^{+1} \left\{ P_m(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2) P_n'(x)] - P_n(x) \cdot \frac{d}{dx} [(1-x^2) P_m'(x)] \right\} dx = 0$$

Partielle Integration im zweiten Integral:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2) P_n'(x)] dx = P_m(x) (1-x^2) P_n'(x) \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} (1-x^2) P_m'(x) P_n'(x) dx$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2) P_m'(x)] dx = P_n(x) (1-x^2) P_m'(x) \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} (1-x^2) P_n'(x) P_m'(x) dx$$

Die Differenz dieser beiden Integrale ist null. Für  $n \neq m$  wird also

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

Den Wert des Integrals für  $n=m$  kann man z.B. über die Darstellung

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

bestimmen.

Die LEGENDRE-Polynome  $P_n(x)$  spannen einen linearen Vektorraum  $\mathcal{R}$  auf (d.h. sie bilden eine Basis in  $\mathcal{R}$ ). Die Elemente  $a, b, c$  des Vektorraums sind alle in  $(-1, 1)$  definierten, reellen Funktionen  $f(x)$  mit der Eigenschaft

$$\int_{-1}^{+1} f^2(x) dx < \infty \quad (\text{"Quadratintegrierbarkeit"})$$

Insbesondere fallen darunter Polynome.

## § 8 Transformationsverhalten von Skalaren, Vektoren und Tensoren.

Bisher hatten wir die Begriffe Skalar (=Zahl) und Vektor (repräsentiert durch einen Pfeil) benutzt, ohne zu sagen, was die mathematischen Eigenschaften dieser Größen sind. Es ist uns selbstverständlich, daß eine skalare Größe  $\phi (\neq)$  nicht von dem gewählten Koordinatensystem abhängt, und daß die Komponenten  $(A_1, A_2, A_3)$  sich von einem Koordinatensystem  $K$  in ein anderes  $K'$  so transformieren müssen, daß der "Pfeil"  $\vec{A}$  invariant bleibt. Es gibt jedoch Fälle, die nicht so einfach sind, z.B.

### Kreuzprodukt

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  kann eigentlich kein Vektor sein.

$$\text{in } K: \vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \quad \vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$$

$$\vec{C} = (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

Spiegelung am Nullpunkt:

$$\text{in } K': \vec{A} = (-A_1, -A_2, -A_3) \quad \vec{B} = (-B_1, -B_2, -B_3)$$

$$\vec{C} = (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

d.h. die Komponenten von  $\vec{C}$  sind in  $K$  und  $K'$  die gleichen, für einen Vektor müssten sie jedoch ihre Vorzeichen wechseln. Außer bei Spiegelungen verhält sich  $\vec{A} \times \vec{B}$  wie ein Vektor. Bei Spiegelungen ändert  $\vec{A} \times \vec{B}$  jedoch seine Richtung.  
(Pseudovektor, axialer Vektor.)

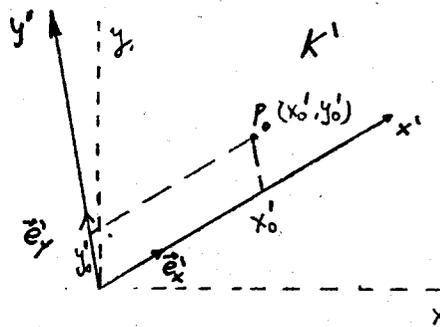
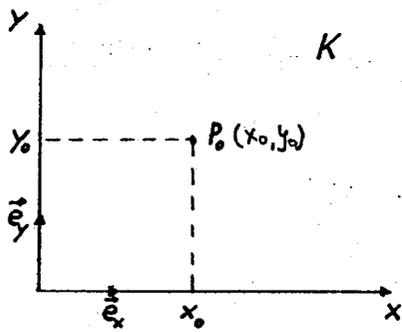
### Spatprodukt

$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$  ändert bei Spiegelungen sein Vorzeichen.  
(Pseudo-Skalar)

### Quadrupoltensor

oder Trägheitstensor. Worin besteht der Unterschied zu einer Matrix?

Skalare, Vektoren und Tensoren repräsentieren bei uns physikalische Größen, die unabhängig von dem gewählten Koordinatensystem sein sollen. Ein und derselbe Vektor (Tensor) hat in verschiedenen Koordinatensystemen natürlich verschiedene Komponenten. Der Einfachheit halber wollen wir uns auf lineare Koordinatentransformationen beschränken.



Ein und derselbe Punkt  $P_0$  wird in  $K$  durch 3 Zahlen  $(x_0, y_0, z_0)$  in  $K'$  durch  $(x'_0, y'_0, z'_0)$  festgelegt.  $x_1 \bar{x}, x_2 \bar{y}, x_3 \bar{z}$  etc.

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \vec{r}' = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3$$

$$x'_1 = S_{11}x_1 + S_{12}x_2 + S_{13}x_3$$

$$x_1 = U_{11}x'_1 + U_{12}x'_2 + U_{13}x'_3$$

\*)

$$x'_2 = S_{21}x_1 + S_{22}x_2 + S_{23}x_3$$

$$x_2 = U_{21}x'_1 + U_{22}x'_2 + U_{23}x'_3$$

$$x'_3 = S_{31}x_1 + S_{32}x_2 + S_{33}x_3$$

$$x_3 = U_{31}x'_1 + U_{32}x'_2 + U_{33}x'_3$$

in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

$$S_{ik} = \frac{\partial x'_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k}$$

$$U_{kl} = \frac{\partial x_k(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial x'_l}$$

$S$  ist die zu  $U$  inverse Matrix und umgekehrt.

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}$$

$$S \cdot U = U \cdot S = \mathbb{1}$$

wobei  $\mathbb{1}$  die Einheitsmatrix bezeichnet.  $S=U^{-1}$  oder  $U=S^{-1}$ .

Man gewinnt  $U^{-1}$  ( $S^{-1}$ ) durch Auflösen des Gleichungssystems \*) nach  $x'_1, x'_2, x'_3$ .

Beweis für  $U \cdot S = \mathbb{1}$ :

$$\text{Bilde } (US)_{il} = \sum_k U_{ik} S_{kl} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x'_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial x'_l} = \frac{\partial x'_i}{\partial x'_l} = \delta_{il}$$

Das nacheinander Ausführen von zwei Koordinatentransformationen: zuerst  $S_1$  und dann  $S_2$  kann durch eine einzige Transformation  $S_2 \cdot S_1$  ersetzt werden.

Die Richtungsvektoren  $\vec{e}_i'$  in Richtung der Koordinatenachsen von  $K'$  hängen mit den Einheitsvektoren  $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$  und  $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$  durch folgende Vorschrift zusammen.

benütze:  $x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 = x_1' \vec{e}_1' + x_2' \vec{e}_2' + x_3' \vec{e}_3'$

$$\vec{e}_i' = \frac{\partial x_1(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_i'} \vec{e}_1 + \frac{\partial x_2(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_i'} \vec{e}_2 + \frac{\partial x_3(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_i'} \vec{e}_3 = \sum_{k=1}^3 u_{ki} \vec{e}_k$$

$$\vec{e}_k = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial x_l(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} \vec{e}_l' = \sum_l S_{lk} \vec{e}_l'$$

(Beachte den Unterschied zur Matrizenmultiplikation)

Eine besonders wichtige Klasse linearer Transformationen sind die sog. orthogonalen Transformationen, welche Drehungen und Spiegelungen beschreiben (von Streckungen wollen wir absehen) und die Besonderheit haben, daß die Einheitsvektoren  $\vec{e}_k'$  orthonormiert sind.

Orthogonale Transformationen:

$$\begin{aligned} \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_k' &= \delta_{ik} \\ S^{-1} &= S^T \end{aligned}$$

d.h. die zu  $S$  inverse Matrix  $S^{-1}$  ist gleich der transponierten Matrix von  $S$ :  $(S^T)_{ik} = S_{ki}$

Beweis: z.B.  $S^T \cdot S = \mathbb{1}$

$$(S^T S)_{ie} = \sum_k S_{ik}^T S_{kl} = \sum_{k=1}^3 S_{ki} S_{kl} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_l = \delta_{il}$$

Rechenregel:  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$        $(A^T)^T = A$

Orthogonale Matrizen haben die Eigenschaften:

a) Zwei Zeilen (Spalten) Vektoren sind orthogonal und normiert.

Zeilenvektoren:  $\sum_j S_{ij} S_{kj} = \delta_{ik}$

Spaltenvektoren:  $\sum_j S_{ji} S_{jk} = \delta_{ik}$

b) Determinante von  $S$  hat die Werte 1 (reine Drehungen) oder -1 (Dreh-Spiegelungen).

Beispiele orthogonaler Transformationen.

a) Spiegelung am Nullpunkt

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse um den Winkel  $\delta$

$$S = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Symbolik:

$\vec{r}, \vec{r}'$  bezeichnen denselben Vektor in  $K$  und  $K'$ . Der Strich bei  $\vec{r}'$  dient lediglich zur Kennzeichnung, welches Koordinatensystem gemeint ist. Ebenso ist  $\vec{r} = \vec{r}'$ .

$r, r'$  als Kurzform für  $(x_1, x_2, x_3)$  bez.  $(x_1', x_2', x_3')$ . Es ist  $x_i \neq x_i'$  !

$T, T'$  als Kurzform für  $(T_{ik})$  bez.  $(T_{i'k'})$   $T_{ik} \neq T_{i'k'}$  !

Ausnahme:  $\vec{e}_i$  und  $\vec{e}'_i$  verschiedene Basisvektoren.

Übersetzung von Vektorbezeichnungsweisen in Matrixschreibweise:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \cong A^T \cdot B$$

$$\vec{A} \vec{T} \cdot \vec{B} = A^T T \cdot B$$

Transformationsverhalten

Skalar  $\phi$  (= Tensor 0.ter Stufe)

$$\phi' = \phi$$

Skalarfeld  $\phi(\vec{r}) = \phi(x, y, z)$

$$\phi'(x', y', z') = \phi(x, y, z)$$

Beachte, daß  $\phi(\vec{r})$  und  $\phi'(\vec{r}')$  zwei verschiedene Funktionen ihrer Argumente sind. Die Werte von  $\phi$  und  $\phi'$  sind jedoch dieselben, wenn  $\vec{r}, \vec{r}'$  den gleichen Punkt im Raum bezeichnet.

Vektor  $\vec{A}(\vec{r})$  : (= Tensor 1. Stufe)

Die Komponenten von  $\vec{A}$  transformieren sich wie die Komponenten des Ortsvektors

$$A'_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x'_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} A_i = \sum_i S_{ki} \cdot A_i$$

$$A' = S \cdot A$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  ist eine Invariante.

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = \sum_{k=1}^3 A'_k B'_k = \sum_{k=1}^3 \sum_{i,j} \frac{\partial x'_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} A_i B_j =$$

$$= \sum_{i,j} (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j) A_i B_j = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

(Diese Definition des Skalarprodukts gilt nur für rechtwinklige Koordinaten. Warum?)

Matrixschreibweise:

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = A'^T \cdot B' = (SA)^T \cdot SB = A^T (S^{-1} S) B = A^T \cdot B$$

Tensor zweiter Stufe  $\vec{T}$

Die Komponenten  $T_{ik}$  transformieren sich wie die Produkte der Komponenten zweier Vektoren

$$T'_{kl} = \sum_i \sum_j \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial x'_l}{\partial x_j} T_{ij}$$

$$T'_{kl} = \sum_{i,j} S_{ki} S_{lj} T_{ij}$$

$$T' = S \cdot T \cdot S^{-1}$$

Die skalare Größe  $\vec{A}^T \vec{T} \vec{B}$  ist eine Invariante

$$\vec{A}'^T \cdot \vec{T}' \cdot \vec{B}' = \sum_{i,k} A'_i T'_{ik} B'_k = \sum_{i,k} \sum_{j,l,m,n} S_{ij} A_j S_{im} S_{kn} T_{mn} S_{kl} B_l$$

$$= \sum_{j,l,m,n} A_j T_{mn} B_l (\vec{e}'_j \cdot \vec{e}'_m) (\vec{e}'_n \cdot \vec{e}'_l) = \sum_{m,n} A_m T_{mn} B_n = \vec{A}^T \vec{T} \vec{B}$$

Matrixschreibweise:

$$\vec{A}'^T \vec{T}' \vec{B}' = A'^T T' B' = (SA)^T S T S^{-1} (SB) = A^T S^T S T S^{-1} S B = A^T T B$$

Tensoren n ter Stufe  $T_{k_1, k_2, \dots, k_n}$  haben n-unabhängige Indices und transformieren sich entsprechend wie  $T_{ik}$ .

Wir beantworten noch die Frage, in welche Rubrik Kreuz- und Spatprodukt einzuordnen sind.

Kreuzprodukt:

$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$  ist eigentlich ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe

$$T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad T_{ik} = A_i B_k - A_k B_i$$

$$T_{12} = A_1 B_2 - A_2 B_1 = C_3$$

$$T_{13} = A_1 B_3 - A_3 B_1 = -C_2$$

$$T_{23} = A_2 B_3 - A_3 B_2 = C_1$$

In einem d-dimensionalen Raum hat T:  $\frac{1}{2} d(d-1)$  unabhängige Komponenten. Nur für  $d = 3$  ist  $\frac{1}{2} d(d-1) = 3$ , d.h. allein im dreidimensionalen Raum lässt sich  $A_i B_k - A_k B_i$  als Vektor schreiben, und auch dann nur, wenn Spiegelungen ausgeschlossen werden. (Im Gegensatz zu einem Vektor ändern bei Spiegelungen die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe nicht ihr Vorzeichen.)

Spatprodukt:

$$V = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = A_1 B_2 C_3 - A_1 B_3 C_2 + A_2 B_3 C_1 - A_2 B_1 C_3 + A_3 B_1 C_2 - A_3 B_2 C_1$$

$$= \text{vollständig antisymmetrisiertes Produkte von } A_i B_k C_l$$

$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$  ist eine Kurzform für eine  $3 \times 3$  Determinante, welche ihrerseits identisch mit einem vollständig antisymmetrischen Tensor dritter Stufe ist, der nur eine einzige unabhängige Komponente hat. Im Gegensatz zum Kreuzprodukt lässt sich das Spatprodukt auch in Räumen mit beliebiger Dimension n als Determinante von n Vektoren  $A_1, A_2, \dots, A_n$  erklären.

### § 9 Hauptachsentransformation eines Tensors zweiter Stufe

Ein symmetrischer (reeller) Tensor zweiter Stufe hat die Besonderheit, daß man mit Hilfe einer orthogonalen Transformation stets ein Koordinatensystem finden kann, in dem  $T_{ik}$  eine Diagonalmatrix ist. Dieses Koordinatensystem heißt Hauptachsensystem.

gegeben:  $T$  durch  $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$  in  $K$ ,  $T_{ik} = T_{ki}$

Transformation:  $T' = STS^{-1}$  mit  $\begin{pmatrix} T'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T'_{33} \end{pmatrix}$  in  $K'$

Wie findet man das Hauptachsensystem?

Wende  $STS^{-1}$  auf einen Vektor  $\psi'$  an:  $(STS^{-1})\psi' = \phi'$

Für einen Vektor in Richtung der Hauptachsen muß  $\phi' = \lambda\psi'$  sein, wobei  $\lambda = T'_{11}$ ,  $T'_{22}$  oder  $T'_{33}$  ist.

$$STS^{-1}\psi' = \lambda\psi' \rightsquigarrow T(S^{-1}\psi') = \lambda S^{-1}\psi' \rightsquigarrow \underline{\underline{T\psi = \lambda\psi}}$$

Hauptachsensystem (= Vektoren  $\psi$ ) und Hauptwerte (= Eigenwerte  $\lambda$ ) finden wir über das Eigenwertproblem:

Eigenwertproblem:

$$T\psi = \lambda\psi$$

$$(T_{11} - \lambda)\psi_1 + T_{12}\psi_2 + T_{13}\psi_3 = 0$$

$$T_{21}\psi_1 + (T_{22} - \lambda)\psi_2 + T_{23}\psi_3 = 0$$

$$T_{31}\psi_1 + T_{32}\psi_2 + (T_{33} - \lambda)\psi_3 = 0$$

Damit dieses homogene Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung besitzt muß die Determinante Null sein. Dies führt auf eine Gleichung 3. Grades, die in unserem Fall 3 reelle Lösungen  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$ ,  $\lambda^{(3)}$  besitzt.

Säkulardeterminante: 
$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$$

Aus der Lösung des linearen Gleichungssystems gewinnen wir die 3 zugehörigen Eigenvektoren:  $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)}$

Satz: gegeben ist eine reelle, symmetrische Matrix  $T_{ik}$ :

- a) Eigenwerte  $\lambda^{(i)}$  sind reell.
- b) Eigenvektoren  $\psi^{(i)}$ , die zu verschiedenen  $\lambda$ 's gehören sind orthogonal.  $\psi^{(i)} \psi^{(j)} = \sum_{k=1}^3 \psi_k^{(i)} \psi_k^{(j)} = 0$  für  $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}$
- c) Hat die Eigenwertgleichung mehrfache Wurzeln, so sind die zugehörigen Eigenvektoren im allgemeinen nicht orthogonal, aber linear unabhängig; können daher nachträglich „orthogonalisiert“ werden.

Beweis zu a)

$$T \psi = \lambda \cdot \psi$$

i te Komponente:

$$\sum_k T_{ik} \psi_k = \lambda \psi_i$$

multipliziere mit  $\psi_i^*$  und  $\sum_i$ :

$$\sum_i \sum_k \psi_i^* T_{ik} \psi_k = \lambda \sum_i |\psi_i|^2$$

konjugiere komplex

$$\sum_i \sum_k \psi_i T_{ik} \psi_k^* = \lambda^* \sum_i |\psi_i|^2$$

vertausche i mit k,  $T_{i,k} = T_{k,i}$ :

$$\sum_i \sum_k \psi_i^* T_{ik} \psi_k = \lambda^* \sum_i |\psi_i|^2$$

idechsch mit

hieraus folgt  $\lambda = \lambda^*$ . Da  $T_{ik}$  und  $\lambda$  reell sind, sind die Eigenvektoren  $\psi^{(i)}$  ebenfalls reell.

Beweis zu b)

$$\alpha) T \psi^{(1)} = \lambda^{(1)} \psi^{(1)}$$

$$\beta) T \psi^{(2)} = \lambda^{(2)} \psi^{(2)}$$

i te Komponente von  $\alpha$ ):  $\sum_k T_{ik} \psi_k^{(1)} = \lambda^{(1)} \psi_i^{(1)}$

multipliziere mit  $\psi_i^{(2)}$  und  $\sum_i$ :  $\sum_i \sum_k \psi_i^{(2)} T_{ik} \psi_k^{(1)} = \lambda^{(1)} \sum_i \psi_i^{(2)} \psi_i^{(1)}$  ①

ebenso für  $\beta$ )

$$\sum_i \sum_k \psi_i^{(1)} T_{ik} \psi_k^{(2)} = \lambda^{(2)} \sum_i \psi_i^{(1)} \psi_i^{(2)}$$
 ②

Differenz, ( $i \leftrightarrow k$  in Gl 2)

$$(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}) \sum_{i=1}^3 \psi_i^{(1)} \psi_i^{(2)} = 0$$

d. h.

$$\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)} :$$

$$\psi^{(1)} \psi^{(2)} = \sum_{i=1}^3 \psi_i^{(1)} \psi_i^{(2)} = 0$$

### § 10 Multipolentwicklung und Kugelfunktionen

Die Multipolentwicklung einer beliebigen Ladungsverteilung haben wir in III.5 bis einschließlich dem Quadrupolterm angegeben. Wir wollen nun untersuchen wie man die komplette Multipolreihe findet.

Multipolreihe 
$$\phi(\vec{r}) = \sum_{n,m} q_{n,m} \Phi_{n,m}(\vec{r})$$

Multipol 
$$\Phi_{n,m}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^{n+1}} Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)$$

$n$  kennzeichnet die Ordnung des  $2^n$ -Pols. Außer  $n$  braucht man - wie sich herausstellt - noch einen weiteren Index  $m$ , denn bereits ein Dipol ( $n = 1$ ) hatte 3 unabhängige Komponenten, ein Quadrupol ( $n = 2$ ) 5 unabhängige Komponenten.  $q_{nm}$  heißen die Multipolmomente der Ladungsverteilung.

Da  $\phi(\vec{r})$  außerhalb den Raumbereichen wo Ladungen sind, eine Lösung von  $\Delta\phi = 0$  ist, und  $q_{nm}$  beliebig sind, muß auch gelten:

$$\Delta \Phi_{n,m}(\vec{r}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta [r^{-n-1} Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)] = 0$$

In Kugelkoordinaten liefert dies:

$$\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left( \sin\vartheta \frac{\partial Y(\vartheta, \varphi)}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 Y(\vartheta, \varphi)}{\partial\varphi^2} + n(n+1) Y(\vartheta, \varphi) = 0$$

Die Kugelfunktion  $Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)$  hängt nur von den Winkeln  $\vartheta, \varphi$  nicht dagegen vom Abstand  $r$  ab. Aus physikalischen Gründen sollen die Lösungen  $Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)$  dieser Differentialgleichung die folgenden Eigenschaften haben:

$$Y(\vartheta, \varphi + 2\pi) = Y(\vartheta, \varphi)$$

$$Y(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = \pm Y(\vartheta, \varphi)$$

Außerdem soll  $Y(\vartheta, \varphi)$  für keine Werte von  $\vartheta, \varphi$  Singularitäten haben. Wir vermuten daher, daß  $Y(\vartheta, \varphi)$  als Polynom in  $\cos\vartheta, \sin\vartheta, \cos\varphi$  und  $\sin\varphi$  geschrieben werden kann. Diese Funktionen finden wir durch folgenden

Separationsansatz:

$$Y(\vartheta, \varphi) = T(\vartheta) \cdot F(\varphi)$$

Einsetzen in die DGL. liefert:

$$\left\{ \frac{\sin\vartheta}{T(\vartheta)} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin\vartheta \frac{dT(\vartheta)}{d\vartheta} \right) + n(n+1) \sin^2\vartheta \right\} + \left\{ \frac{1}{F(\varphi)} \frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} \right\} = 0$$

Da  $\vartheta$  und  $\varphi$  unabhängige Variablen sind, kann diese Gleichung nur dann erfüllt sein, wenn die Klammerausdrücke  $\{ \dots \}$  konstant sind.

Es ist zweckmäßig, diese Konstanten  $-m^2$  bez.  $+m^2$  zu nennen.  
 $m$  ist reell.

$$(1) \quad \frac{\sin \vartheta}{T(\vartheta)} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dT(\vartheta)}{d\vartheta} \right) + m(m+1) \sin^2 \vartheta = +m^2$$

$$(2) \quad \frac{1}{F(\varphi)} \frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2$$

Wir diskutieren zunächst die DGL. (2).

$$F''(\varphi) + m^2 F(\varphi) = 0 \quad \sim \quad F(\varphi) = e^{im\varphi} \quad \text{oder} \quad e^{-im\varphi}$$

Andere mögliche Lösungen wären - ganz wie erhofft -  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$ .  
 Aus Gründen der Einfachheit der Darstellung wählen wir die Form

$$\boxed{F_m(\varphi) = e^{im\varphi}} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$e^{-im\varphi}$  wird durch die Wahl negativer  $m$ -Werte automatisch eingeschlossen. Die Eindeutigkeit fordert, daß  $m$  gleich einer ganzen Zahl ist.

Gl. (1) besagt, daß  $T(\vartheta)$  von  $n$  und  $m$  abhängt.

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dT(\vartheta)}{d\vartheta} \right) + m(m+1) \sin^2 \vartheta T(\vartheta) - m^2 T(\vartheta) = 0$$

Wir führen nun  $\cos \vartheta = \xi$  als neue Variable ein.

$$T(\vartheta) = S(\xi) \quad \frac{d}{d\vartheta} \dots = -\sin \vartheta \frac{d}{d\xi} \dots$$

$$(1-\xi^2) \frac{d}{d\xi} \left[ (1-\xi^2) \frac{dS(\xi)}{d\xi} \right] + [m(m+1)(1-\xi^2) - m^2] S(\xi) = 0$$

Für  $m = 0$  (d.h.  $Y_{n,m}^{(\vartheta,\varphi)}$  hängt nicht von  $\varphi$  ab) ist diese DGL.

identisch mit der Legendre'schen DGL. (s. §11). Lösungen mit den geforderten Eigenschaften erhalten wir durch folgenden Ansatz:

$$S(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{|m|}{2}} \cdot P_n^{(|m|)}(\xi)$$

Im Gegensatz zu den Legendrepolyomen  $P_n(\xi)$  ist  $S(\xi)$  kein Polynom. Jedoch wird nach Abspalten von  $(1-\xi^2)^{|m|/2} \equiv \sin^{|m|} \vartheta$   $P_n^{(|m|)}(\xi)$  ein Polynom in  $\xi$  und ist damit garantiert nirgends singular.  $P_n^{(|m|)}(\xi)$  heißt zugeordnetes Legendrepolynom

$$(1-\xi^2) P''(\xi) - 2(|m|+1)\xi P'(\xi) + [n(n+1) - |m|(|m|+1)] P(\xi) = 0$$

Durch einen Potenzreihenansatz wäre leicht einzusehen, daß diese DGL. Polynomlösungen hat. (Die Zweite, von  $P_n^{(|m|)}(\xi)$  linear unab-

hängige Lösung ist bei  $\xi = \pm 1$  singular).

Zwischen  $P_n(\xi)$  und  $P_n^{(m)}(\xi)$  gibt es einen einfachen Zusammenhang:

$$m = 0: P_n^{(0)}(\xi) = P_n(\xi)$$

$$|m| = 1: (1-\xi^2) \cdot P_n^{(1)}(\xi) - 2(1+\xi)\xi P_n^{(1)}(\xi) + [n(n+1)-2] P_n^{(1)}(\xi) = 0$$

Wir vergleichen mit der Legendre'schen DGL:

$$(1-\xi^2) P_n'' - 2\xi P_n' + [n(n+1)-0] P_n = 0$$

differenziere:

$$(1-\xi^2) [P_n']'' - 4\xi [P_n']' + [n(n+1)-2] P_n' = 0$$

d.h.  $\frac{d}{d\xi} P_n(\xi)$  ist proportional zu  $P_n^{(|m|)}(\xi)$ .

$|m| > 1$ : Entsprechend zu  $|m| = 1$  differenziert man die Legendre'sche DGL  $|m|$  mal.

Zugeordnete Legendre-Polynome:  
(Polynom vom Grad  $n - |m| \geq 0$  !)

$$P_n^{(|m|)}(\xi) = \frac{d^{|m|}}{d\xi^{|m|}} P_n(\xi)$$

Nichtganzzahlige Werte für  $n, m$  würden stets Lösungen liefern, die entweder nicht eindeutig, oder bei  $\xi = 0, \pm 1$  singular wären.

$$n = 0, 1, 2, 3$$

$|m| = 0, 1, 2, \dots, n$  d.h. für gegebenes  $n$  läuft  $m$  von  $-n, \dots, n$ .

Wir listen einige dieser Polynome auf:

$$P_0^{(0)}(x) = P_0(x) = 1$$

$$P_1^{(0)}(x) = P_1(x) = x \quad ; \quad P_1^{(1)}(x) = 1$$

$$P_2^{(0)}(x) = P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad ; \quad P_2^{(1)}(x) = 3x \quad ; \quad P_2^{(2)}(x) = 3$$

$$P_3^{(0)}(x) = P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \quad ; \quad P_3^{(1)}(x) = \frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2} \quad ; \quad P_3^{(2)}(x) = 15x \quad ; \quad P_3^{(3)}(x) = 15$$

Es ist Konvention <sup>\*)</sup> die Kugelfunktionen  $Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$  geeignet zu normieren

$$Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} (-1)^m & : m \geq 0 \\ +1 & : m < 0 \end{cases} \cdot \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} \sin^{|\ell-m|} \vartheta P_{\ell}^{|\ell-m|}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

Wir listen einige der Kugelfunktionen auf:

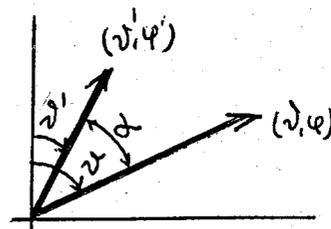
$\ell$	$m$	$Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$
0	0	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
1	0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$
	$\pm 1$	$\pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$
2	0	$\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right)$
	$\pm 1$	$\mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{\pm i\varphi}$
	$\pm 2$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot e^{\pm 2i\varphi}$

Wichtige Relationen:

Orthogonalitätsrelation:  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell',m'}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$

Additionstheorem:  $P_{\ell}(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$

$\alpha$  bezeichnet den Winkel zwischen den durch  $(\vartheta', \varphi')$  und  $(\vartheta, \varphi)$  festgelegten Vektoren.



Entwicklungssatz:  $f(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$

$$f_{\ell,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\vartheta, \varphi) Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

\*) Jackson, Classical Elektrodynamik, p. 64.  $P_{\ell}^m(\cos \vartheta)$  hat dort aber eine andere Bedeutung. Die Vorzeichenkonvention ist nicht einheitlich!

## 11 Nichtlineare, dispersive Wellen: Solitonen

Die Maxwellgleichungen und die hieraus abgeleitete Wellengleichung sind linear (wenigstens soweit  $\rho$  und  $\vec{j}$  nicht selbst wieder von den Feldern abhängen). In einer Raumdimension und ohne äußeren Antrieb gilt:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x, t) = 0.$$

Die d'Alembert-Lösung für den freien Raum lautet

$$\Psi(x, t) = f^{(+)}(x - ct) + f^{(-)}(x + ct),$$

wobei  $f^{(\pm)}$  zwei willkürliche Funktionen sind, welche in  $\pm x$  Richtung laufende Wellen(-berge) beschreiben. Diese Wellen breiten sich formstabil (= dispersionsfrei) aus und durchdringen sich völlig ungestört.

Wellen in Hohlleitern oder in Medien mit einem frequenzabhängigen Brechungsindex zeigen jedoch Dispersion, d.h. Wellenpulse zerlaufen mit der Zeit (störend für Nachrichtenübermittlung!). In vielen Fällen, wie z. B. Flutwellen, kommt Nichtlinearität dazu, d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit ändert sich mit der Amplitude. Beide Phänomene können zur Bildung von "solitären Wellen" führen, die sich ebenfalls formstabil ausbreiten. Das Paradebeispiel ist die KdV-Gleichung (Korteweg de Vries)

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \left( 1 + \frac{3}{2h} u(x, t) \right) u(x, t) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} = 0.$$

Die einzelnen Terme dieser Gleichung lassen sich wie folgt verstehen:

(1) Umschreiben der linearen Wellengleichung:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x, t) = 0.$$

Diese Gleichung kann für  $\Psi = u(x, t)$  durch

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = 0,$$

mit  $u(x, t) = f^{(+)}(x - ct)$  erfüllt werden. (Faktorisieren mit umgekehrter Reihenfolge liefert  $f^{(-)}(x + ct)$ .)

(2) Lineare Anteile der KdV-Gleichung

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c_0 \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \right) = 0.$$

Dies löst man durch  $u(x, t) = A \exp(i(kx - \omega t))$  mit  $\omega(k) = c_0 k(1 - a/c_0 k^2)$ . D.h. Wellengruppen mit größeren Wellenzahlen (größeren Frequenzen) laufen langsamer.

(3) Nichtlinearität (ohne Dispersion)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c_0(1 + bu(x, t))\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0,$$

d.h. die Phasengeschwindigkeit nimmt mit der Amplitude zu. Die "Lösung" ist gegeben durch

$$u(x, t) = f^{(+)}(x - c_0(1 + bu(x, t))t)$$

**Beispiel:**  $f^{(+)}(x) = (1 - |x|)\Theta(1 - |x|)$  (Dreieck-Funktion).

(a) Für  $c_0t - 1 \leq x \leq (1 + b)c_0t$  ist

$$u_1(x, t) = \frac{1 + x - c_0t}{1 + bc_0t}$$

(b) Für  $bc_0t < 1 : (1 + b)c_0t \leq x \leq 1 + c_0t$  oder  $bc_0t > 1 : (1 + b)c_0t \geq x \geq 1 + c_0t$  ist

$$u_2(x, t) = \frac{1 - x + c_0t}{1 - bc_0t}$$

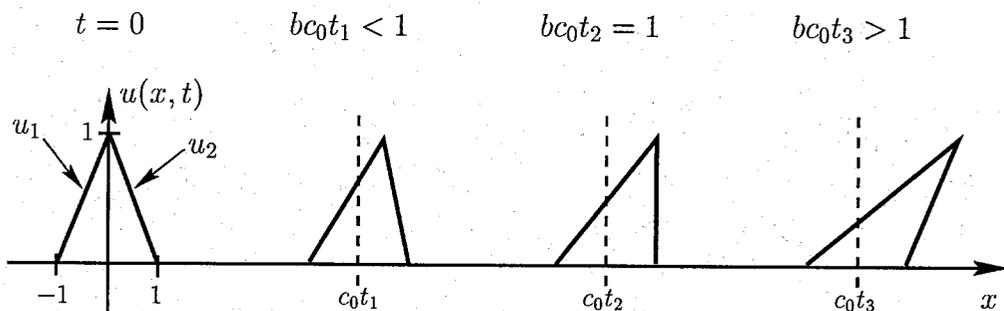


Abbildung 1: Für Zeiten  $t > 1/bc_0$  kommt es zu "Brechern".

(4) Nichtlinearität und Dispersion: Solitonen. Die exakte Lösung der KdV-Gleichung ist

$$u(x, t) = A \left[ \cosh \frac{x - ct}{L} \right]^{-2},$$

mit  $c = c_0(1 + A/2h)$  und  $L = \sqrt{4h^3/3A}$ . Höhere Wellen laufen schneller und sind schmaler!

Zwei oder mehrere Solitonen wechselwirken (über die Nichtlinearität  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ) miteinander. Erstaunlicherweise durchdringen sich diese jedoch trotzdem ohne in Teile zu zerbrechen.

Ein sehr netter Artikel: *Physics*, Chapter 32, p. 808: Kelley, Gettys and Skove, McGraw Hill, Inc.

## 12 Green-Funktionen

Der Begriff Green-Funktion tritt bei der Lösung einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung mit einer beliebigen Inhomogenität auf, z.B.

$$\hat{L}_n y(x) = f(x).$$

$\hat{L}_n$  ist ein Differentialausdruck der Ordnung  $n$ , z.B.

$$\begin{aligned} n = 1: \quad \hat{L}_1 &= \frac{d}{dx} + \alpha, \\ n = 2: \quad \hat{L}_2 &= \frac{d^2}{dx^2} + \beta \frac{d}{dx} + \gamma. \end{aligned}$$

Hinzu kommen Randbedingungen, z.B.  $y(a) = y(b) = 0$ , unter denen die homogene DGL keine nichttriviale Lösung besitzen soll. Dann hat das inhomogene Problem genau eine Lösung.

(a) Wir betrachten zunächst den Spezialfall

$$\hat{L}_n y(x) = \delta(x - x'), \quad x' \text{ fest.}$$

Für  $x > x'$  und  $x < x'$  ist  $y(x)$  eine Lösung der homogenen DGL. (welche die Randbedingung erfüllt).

$$\begin{aligned} x > x': \quad y^{(+)} &= \sum_{i=1}^n c_i y_i(x) \\ x < x': \quad y^{(-)} &= \sum_{i=1}^n d_i y_i(x) \end{aligned}$$

$y_i$  sind die Lösungen der homogenen DGL  $\hat{L}_n y_i(x) = 0$ ,  $i = 1 \dots n$ .  $y^{(\pm)}$  sind bei  $x = x'$  so aneinanderzufügen, daß  $\hat{L}_n y(x) = \delta(x - x')$ .

$$\begin{aligned} n = 1: \quad y(x) &\text{ macht einen Sprung bei } x = x', \\ n = 2: \quad y(x) &\text{ stetig, } y'(x) \text{ macht einen Sprung bei } x = x'. \end{aligned}$$

Die Höhe dieses Sprungs ist gerade durch den Kehrwert des Koeffizienten der höchsten Ableitung von  $\hat{L}_n$  gegeben. (Im obigen Beispiel: Sprung = 1.)

Die so konstruierte Lösung der inhomogenen DGL. nennt man die Green-Funktion  $g(x, x')$ .

(b) Um die Lösung der inhomogenen DGL. für beliebige  $f(x)$  zu gewinnen, "zerlegen" wir  $f(x)$  nach  $\delta$ -Funktionen

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx'$$

und benutzen die Linearität der DGL.:

$$y(x) = \int g(x, x') f(x') dx'.$$

Beispiele:

- (1) Teilchen mit Reibung und äußerer Antriebskraft (RB:
- $v(-\infty) = 0$
- ):

$$m \left( \dot{v}(t) + \frac{1}{\tau} v(t) \right) = f(t)$$

$$\text{Green-Funktion : } g(t, t') = \frac{1}{m} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \Theta(t-t')$$

$$\text{Geschwindigkeit : } v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, t') f(t') dt'$$

- (2) Harmonischer, getriebener Oszillator. (RB:
- $x(\pm\infty) = 0$
- ).

$$m \left( \ddot{x}(t) + \frac{1}{\tau} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) \right) = f(t)$$

$$\text{Green-Funktion : } \begin{cases} m \left( \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) g(t, t') = \delta(t-t'), \\ g(t, t') = \frac{1}{m\Omega} e^{-\frac{t-t'}{2\tau}} \sin(\Omega(t-t')) \Theta(t-t'), \end{cases}$$

$$\text{mit } \Omega^2 = \omega_0^2 - (1/2\tau)^2.$$

$$\text{Auslenkung : } x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, t') f(t') dt'$$

Die Green-Funktion ist die Reaktion des Oszillators auf einen (Einheits-)Kraftstoß zur Zeit  $t = t'$ .

- (3) Poisson-Gleichung für Potential
- $\Phi(\vec{r})$
- . Randbedingung
- $\Phi(\infty) = 0$
- .

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

$$\text{Green-Funktion : } \begin{cases} \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \\ G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \end{cases}$$

$$\text{Potential : } \Phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}, \vec{r}') \left( -\frac{1}{\epsilon_0} \right) \rho(\vec{r}') d\vec{r}'.$$

Die Green-Funktion ist hier (abgesehen von dem Faktor  $-1/\epsilon_0$ ) das Potential einer Einheitspunktladung bei  $\vec{r} = \vec{r}'$ .

Weitere Beispiele, siehe: *Vektorpotential* IV.1, *Retardierte Potentiale* V.8, *Dielektrizitätsfunktion im Zeitbereich* VI.9

Kap. III Elektrostatik

§4. Das elektrische Potential für vorgegebene Ladungsverteilungen

Wir gehen davon aus, daß das Feld  $\vec{E}$  im ganzen Raum von einer zeitlich konstanten Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  erzeugt wird und keine Ströme bzw. Magnetfelder vorhanden sind. Die Maxwell'schen Gleichungen vereinfachen sich dann zu:

Elektrostatik

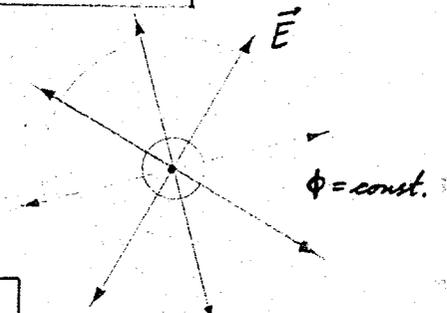
$\text{div } \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho(\vec{r})$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
---	---------------------------

Wegen  $\text{rot } \vec{E} = 0$  ist  $\vec{E}$  wirbelfrei und lässt sich als Gradient eines Potentialfeldes  $\phi(\vec{r})$  darstellen. (sog. konservatives (Kraft-) Feld,  $\vec{F} = q\vec{E}$  und  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ).

Poissongleichung

$\vec{E} = -\text{grad } \phi(\vec{r})$
$\Delta \phi = \text{div grad } \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$

Die  $\vec{E}$ -Feldlinien stehen stets senkrecht auf den Äquipotentialflächen  $\phi(\vec{r}) = \text{const.}$



Laplaceoperator:

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
--

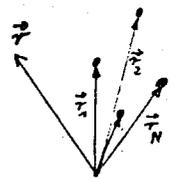
Punktladungen:

$\phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$
$\vec{E}_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$

Ist uns die Ladungsverteilung im gesamten Raum (einschließlich den Werten von  $\rho$  auf Begrenzungsflächen oder vorhandener Materie etc.) bekannt, so können wir das Potential direkt mit Hilfe des Superpositionsprinzips und  $\phi_p(\vec{r})$  angeben.

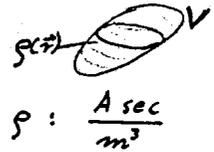
Verteilung von  
Punktladungen:

$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{ \vec{r} - \vec{r}_n }$
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{ \vec{r} - \vec{r}_n ^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_n}{ \vec{r} - \vec{r}_n }$



oder bei kontinuierlicher Verteilung der Ladungen:

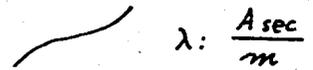
Volumenverteilung  $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$



Flächenverteilung  $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_F \frac{\sigma(\vec{r}') |d\vec{F}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$



Linienverteilung  $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') |d\vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$



Diese Potentiale wurden so normiert, daß  $\phi(\infty) = 0$  gilt. Sofern dies möglich ist, wollen wir uns stets an diese Konvention halten.

Durch die obige Integraldarstellungen ist das Problem "Finde  $\vec{E}$  bei vorgegebenem  $\rho$ " gelöst. Allerdings kann die Auswertung dieser Integrale selbst für einfache Fälle ziemlich mühevoll sein, so daß es leichter ist, direkt von der Poissongleichung oder den MGLn auszugehen und zu versuchen, diese zu integrieren.

In vielen Fällen ist die Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  nicht, oder nur teilweise, durch die Problemstellung festgelegt; es werden vielmehr die Werte von  $\phi$  auf Begrenzungen vorgeschrieben. Einige Beispiele dieser Art und ihre Lösungsverfahren werden wir in § 3 kennenlernen.

Wir wollen nun nachweisen, daß für das Potential einer Punktladung  $\phi(\vec{r})$   $\Delta\phi = 0$  gilt, sofern  $\vec{r} \neq 0$  ist.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5} ; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} = \frac{3y^2 - r^2}{r^5} ; \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} = \frac{3z^2 - r^2}{r^5} ;$$

Insgesamt:  $\Delta \frac{1}{r} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r}$  für  $r \neq 0$

Der Vorteil der Deltafunktion zeigt sich z.B. darin, daß wir nun in der Lage sind,  $\frac{1}{r}$  formal bei  $r=0$  zu differenzieren:

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi \delta(\vec{r})$$

und außerdem den Gauss'schen Satz in der in § 3 angegebenen Form benutzen dürfen,

Für eine Kugel mit Radius  $R$  um  $r=0$  gilt:

$$\iiint_V (\Delta \frac{1}{r}) dV = \iiint_V \operatorname{div}(\operatorname{grad} \frac{1}{r}) dV = \iint_F (\operatorname{grad} \frac{1}{r}) \cdot d\vec{F} = -\frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi$$

$$\iiint_V (\Delta \frac{1}{r}) dV = \iiint_V -4\pi \delta(\vec{r}) dV = -4\pi$$

Wir zeigen nun formal, daß das in angegebene Volumenintegral für  $\phi(\vec{r})$  Lösung der Poissongleichung ist.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \Delta_r \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}') \Delta_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}') (-4\pi) \delta(\vec{r}-\vec{r}') dV' =$$

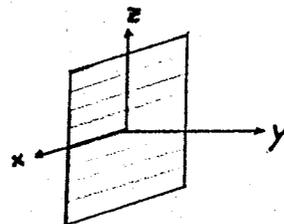
$$= -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') dV' = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

( $\rho(\vec{r})$  haben wir im Integrationsgebiet als stetig vorausgesetzt.)

## 2 Beispiele zur Lösung der Laplace- und Poissongleichung

Bei einigen einfachen Problemen legen Symmetrieargumente (oder andere Argumente) es nahe, daß  $\phi(\vec{r})$  nur von einer Koordinate abhängt (z.B.  $x, \varphi$  oder  $r$ ). Für solche Probleme lässt sich die Poissongleichung einfach integrieren.

- a) Potential einer unendlich ausgedehnten, homogen geladenen Platte, die in der  $x$ - $z$  Ebene liegt.  $\phi(x, y, z) = \phi(y)$ .



Für  $y \neq 0$  ist  $\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^2} = \sigma \leadsto \phi(y) = ay + b$

$$y > 0 \quad \phi^+(y) = ay + b$$

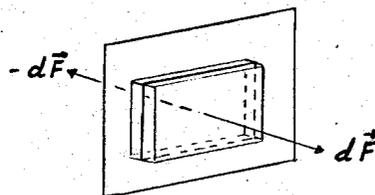
$$y < 0 \quad \phi^-(y) = \bar{a}y + \bar{b}$$

$-a = \bar{a}$  und  $b = \bar{b}$ , wegen der Symmetrie  $\phi(-y) = \phi(y)$ . Der Wert von  $b$  ist beliebig.  $a$  hängt mit der Flächenladungsdichte  $\sigma$  der Platte zusammen. Integration von  $\vec{E}$  über ein Volumen, das die Platte einschließt, liefert:

$$\vec{E} = -a \operatorname{sign}(y) \cdot \vec{e}_y$$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{F} = -a \cdot \Delta F - a \cdot \Delta F = -2a \Delta F \stackrel{!}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \cdot \Delta F$$

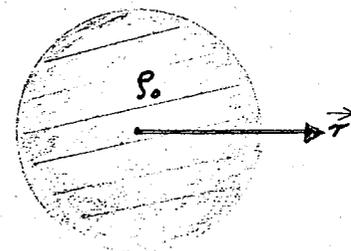
$$a = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



- b) Potential einer homogen geladenen Kugel vom Radius  $R$ . Gesamtladung ist  $Q$ , die Ladungsdichte  $\rho_0 = Q / \frac{4}{3}\pi R^3$ .

Die Symmetrie des Problems legt den Ansatz  $\phi(\vec{r}) = \phi(|\vec{r}|)$  nahe: In Kugelkoordinaten ist

$$\Delta\phi(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left( r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} & \text{für } 0 \leq r < R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$



Lösung für  $r \leq R$ :

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot r^2 \leadsto r^2 \frac{d\phi}{dr} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{1}{3} r^3 + C_1 \leadsto \phi_1(r) = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$$

Lösung für den Außenraum  $r \geq R$ :  $\phi_2(r) = -\frac{D_2}{r} + D_2$

Die vier Konstanten  $C_1, C_2, D_1, D_2$  werden durch die Bedingungen festgelegt:

i)  $\phi(\infty) = 0 \rightsquigarrow D_2 = 0$

ii) Bei  $r=0$  befindet sich keine isolierte Punktladung!  $\rightsquigarrow c_1=0$

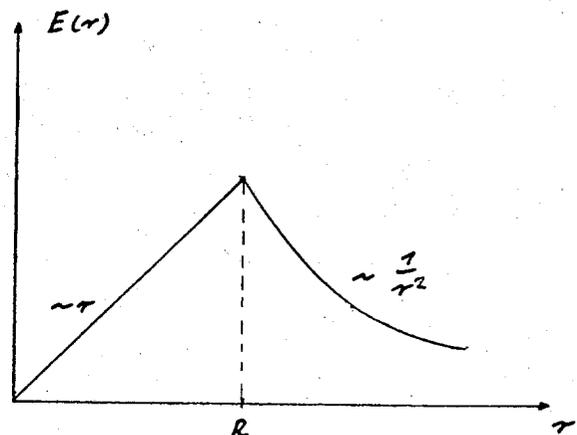
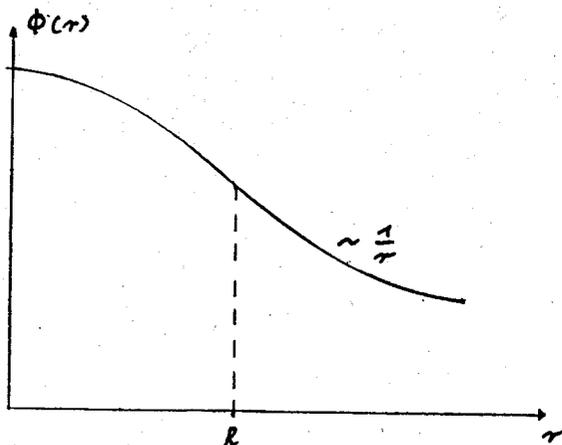
iii) Bei  $r=R$  sind  $\phi(\vec{r})$  und  $\vec{E}(\vec{r})$  stetig:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} R^2 + C_2 &= -\frac{D_1}{R} \\ \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R &= -\frac{D_1}{R^2} \end{aligned} \right\} C_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 \quad D_1 = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R^3 = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}$$

Lösung:

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) & \text{für } 0 < r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & \text{für } r \geq R \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \left( \frac{\vec{r}}{R} \right) & \text{für } 0 < r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) & \text{für } r \geq R \end{cases}$$



Es ist bemerkenswert, daß das Außenfeld gleich dem einer Punktladung ist. Im Innenraum gilt für eine Probeladung  $q$  ein lineares Kraftgesetz:  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}(\vec{r}) \sim r$  (vergl. Feder).

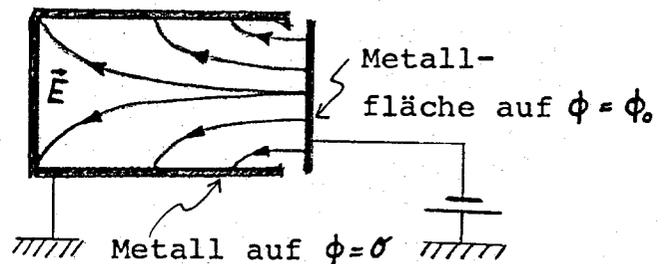
§ 3 Verhalten von  $\phi$  und  $\vec{E}$  auf Begrenzungen. Etwas Potentialtheorie.

Alle bisher betrachteten Probleme waren von der Art, daß die Ladungsverteilung in jedem Punkt des Raumes als bekannt vorausgesetzt wurde. Das Potential lässt sich dann explizit angeben, ohne die Poissongleichung zu lösen.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Bei vielen Potentialproblemen ist jedoch nicht  $\rho(\vec{r}')$ , sondern  $\phi(\vec{r})$  (oder die Normalkomponente von  $\vec{E}$ ) auf Begrenzungsflächen vorgegeben.

Beispiel: "Kondensatorfelder"



Sind im Innern des Volumens keine Ladungen vorhanden, hat man also ein Randwertproblem zu lösen.

Laplacegleichung:  $\Delta\phi = 0$

Randbedingung:  $\phi = \phi_0$  auf der Metallfläche

Aus der Potentialtheorie übernehmen wir den

Satz: Durch Vorgabe von  $\phi$ , oder der Normalableitung von  $\phi$  auf der Oberfläche eines Volumens ist das Potential in jedem Punkt des Raumes festgelegt.

Sind außerhalb der Begrenzungen auch noch Ladungen mit der Dichte  $\rho(\vec{r}')$  vorhanden, so betrachtet man

$$\phi = \tilde{\phi} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

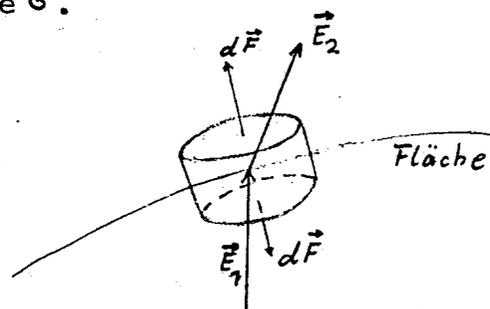
und bestimmt  $\tilde{\phi}$  mit  $\Delta\tilde{\phi} = 0$  so, daß  $\phi$  die Randbedingungen erfüllt.

Wir untersuchen nun noch den Einfluß von Begrenzungen auf die Feldstärke bzw. das Potential. (Es soll kein elektrischer Strom fließen)

1) Fläche mit der (Flächen-)Ladungsdichte  $\sigma$ .

Es ist

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



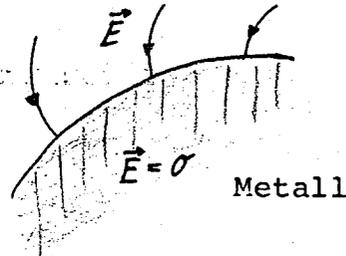
$\vec{E}_n$  bezeichnet die Komponente von  $\vec{E}$  senkrecht zur Fläche.

Beweis: Betrachte ein Volumen in Form einer flachen Dose, die  $\mathcal{F}$  einschließt (Fläche der Dose  $\rightarrow 0$ ).

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{F} = E_{2n} \cdot \Delta F - E_{1n} \cdot \Delta F = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot G \cdot \Delta F$$

- 2) Im Innern eines Metalls, das sich in einem elektrischen Feld befindet, ist  $\vec{E} \equiv 0$  bzw.  $\phi = \text{const.}$ , d.h. eine Metallfläche ist stets eine Äquipotentialfläche.

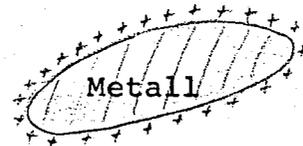
Beweis: Wäre  $\vec{E} \neq 0$ , so flösse ein elektrischer Strom.



- 3) Bei einem geladenen Metall sitzen die Ladungen immer auf der Oberfläche.

Dort gilt:

$$\underline{E_{\text{tang.}} = 0} \quad \underline{E_{\text{normal}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$



Beweis: Da im Innern  $\vec{E} = 0$ , ist dort auch  $\rho = \epsilon_0 \cdot \text{div } \vec{E} = 0$ .

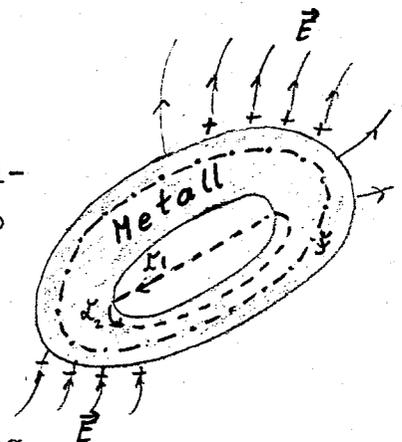
$E_{\text{normal}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  nach 1).  $E_{\text{tang.}} = 0$ , sonst fließt ein Strom auf der Oberfläche.

- 4) Hat ein Metallkörper einen geschlossenen Hohlraum, in dem sich keine Ladungen befinden, so ist im Hohlraum  $\vec{E} = 0$  und auf der Oberfläche der Kavität befinden sich keine Ladungen

Beweis:

a) aus  $\oint \vec{E} d\vec{F} = 0$  folgt, daß die Gesamtladung auf der Innenfläche Null ist.

b) angenommen es befänden sich Ladungen auf der Innenfläche, so wäre  $\oint \vec{E} d\vec{F} \neq 0$ , wenn  $\mathcal{L}_1$  parallel einer Feldlinie gewählt wird. Dieser Widerspruch löst sich nur, wenn  $\vec{E} \equiv 0$  in der Kavität ist.



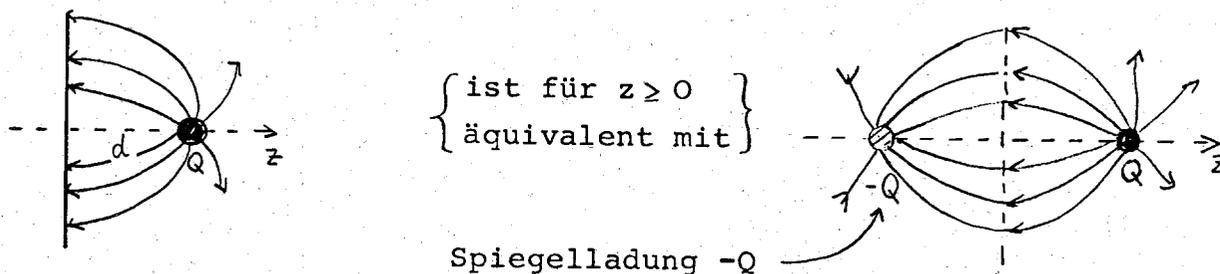
Etwas Potentialtheorie:

Wir geben zwei Methoden an, wie man das Potential  $\phi(\vec{r})$  als Lösung von  $\Delta\phi=0$  bei gegebenen Randbedingungen finden kann.

a) Methode der Spiegelladungen.

Ist  $\phi(\vec{r})=const$  auf einer Fläche vorgegeben (Metallfläche, die auf ein bestimmtes Potential gelegt wird), so können wir in gewissen Fällen diese Randbedingung durch den Potentialbeitrag zusätzlicher Ladungen (=Spiegelladungen) simulieren, sodaß die Randbedingung erfüllt wird. Ob auf diese Fläche dann eine Metallfläche gelegt wird, oder nicht, ist nach 2) egal.

Ein Paradebeispiel für diese Methode ist das Feld einer Punktladung  $Q$  vor im Abstand  $d$  vor einer Metallfläche.



Weitere Beispiele findet man in Landau-Lifschitz, Bd. VIII, S. 11

b) Versuche durch Überlagerung von Lösungen  $\phi_n(\vec{r})$  der Laplace-Gleichung  $\Delta\phi_n=0$  eine Gesamtlösung

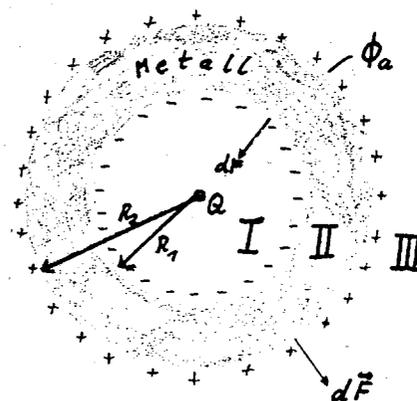
$$\phi = \sum_n c_n \phi_n$$

zu konstruieren, welche die geforderten Randbedingungen erfüllt. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist dies die gesuchte Lösung.

c) Andere Methoden, die jedoch wesentlich über den Rahmen dieser Vorlesung hinausgehen, findet man z. B. in  
 Cook: The Theory of the Electromagnetic Field, Seite 213-248  
 Jackson: Classical Electrodynamics, ab Seite 26

Beispiel:

Berechne  $\phi$  und  $\vec{E}$  einer Punktladung  $Q > 0$ , die sich im Inneren einer metallischen Hohlkugel mit den Radien  $R_1, R_2$  befindet.



Lösung: In Betracht kommen nur kugelsymmetrische Lösungen von  $\Delta\phi = 0$

$$\phi = \frac{C}{r} + D$$

I)  $0 \leq r < R_1 \quad \phi = \frac{C_I}{r} + D_I$

$C_I$  muss gleich  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$  sein.

$$\phi(R_1) = \phi_a \quad : \quad D_I = \phi_a - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R_1}$$

$$\phi_I(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) + \phi_a$$

$$\vec{E}_I(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

Flächenladungsdichte auf der Innenseite beträgt  $\sigma = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_I = -\frac{Q}{4\pi R_1^2}$   
d.h. insgesamt wird die Ladung  $Q_I = -Q$  influenziert.

II)  $R_1 \leq r \leq R_2 \quad \phi_{II}(\vec{r}) \equiv \phi_a$

$$\phi_{II}(\vec{r}) = \phi_a$$

$$\vec{E}_{II}(\vec{r}) = 0$$

III)  $r \geq R_2 \quad \phi_{III}(\vec{r}) = \frac{C_{III}}{r} + D_{III}$

$$\phi_{III}(\vec{r}) = (\phi_a - D_{III}) \frac{R_2}{r} + D_{III}$$

$$\phi_{III}(R_2) = \phi_a \quad C_{III} = R_2 (\phi_a - D_{III})$$

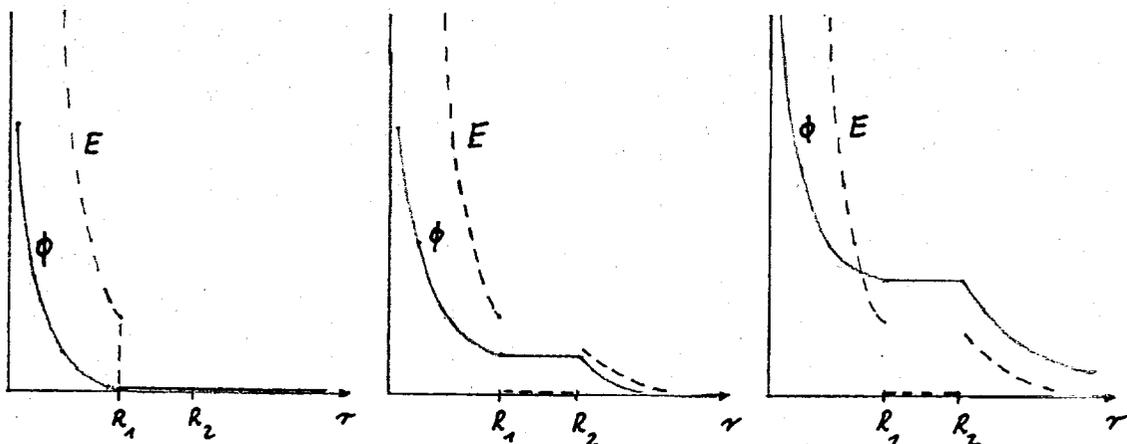
$$\vec{E}_{III}(\vec{r}) = (\phi_a - D_{III}) \frac{R_2}{r^2} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$\phi_a - D_{III}$  ist die an die Kugel gelegte Spannung. Wir wählen  $D_{III} = 0$ . Die auf der Oberfläche  $r=R_2$  sitzende Ladung ist

$$Q_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2 \phi_a$$

geerdete Metallkugel:  $\phi_a = 0$ , d.h.  $Q_2 = 0$ ,  $\phi_{III}(r) \equiv 0$ ,  $\vec{E}_{III} \equiv 0$ .

Metallkugel hängt in der Luft: Es muss  $Q_2 = -Q_1$  sein, d.h.  $Q_2 = Q$



Kugel geerdet

Kugel in der "Luft", bel. Wert von  $\phi_a$

Ein anderes Problem der Potentialtheorie, nämlich eine Metallkugel in einem äußeren Feld, werden wir in § 6 näher untersuchen.

§ 4 Das Feld zweier Punktladungen : Multipole

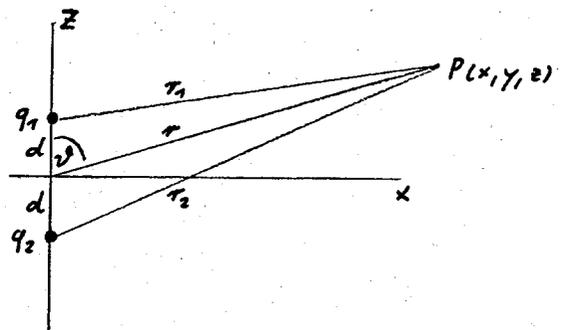
Wir betrachten das Feld, welches von zwei Punktladungen  $q_1$  und  $q_2 = +/- q_1$ , die sich im Abstand  $2d$  befinden, erzeugt wird. Der Einfachheit halber ordnen wir beide Ladungen symmetrisch zum Nullpunkt auf der z-Achse an.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

$$r_1 = \sqrt{(z-d)^2 + x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 + d^2 - 2zd}$$

$$r_2 = \sqrt{(z+d)^2 + x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 + d^2 + 2zd}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Wir wollen nun  $\phi(\vec{r})$  für Abstände  $r > d$  untersuchen. Hierzu entwickeln wir  $1/r_1$  und  $1/r_2$  nach Potenzen von  $d/r$ .

$$r_{1,2} = \sqrt{r^2 + d^2 \pm 2dr \cos \vartheta} = r \cdot \sqrt{1 \pm 2 \frac{d}{r} \cos \vartheta + \left(\frac{d}{r}\right)^2}$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots \quad |x| < 1$$

mit  $\xi = \cos \vartheta$  und  $\eta = d/r$  wird

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi\eta + \eta^2}} = 1 - \frac{1}{2}(-2\xi\eta + \eta^2) + \frac{3}{8}(-2\xi\eta + \eta^2)^2 - \frac{5}{16}(-2\xi\eta + \eta^2)^3 + \dots$$

oder nach Umordnung der Reihe:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi\eta + \eta^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n P_n(\xi) = 1 + \eta\xi + \eta^2 \left( \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2} \right) + \dots$$

Die Funktionen  $P_n(\xi)$  heißen LEGENDRE-Polynome. Sie treten generell in Verbindung mit dem LAPLACE-Operator bei der Beschreibung von Winkelabhängigkeiten auf.

Einige ihrer wichtigsten Eigenschaften sind:

1)  $P_n(\xi)$  ist ein Polynom vom Grad  $n$ .

$$\text{hier: } P_0(\xi) = 1 \quad P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_1(\xi) = \xi \quad P_3(\xi) = \frac{5}{2}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi$$

2)  $P_n(1) = 1$

$$\text{da: } \frac{1}{\sqrt{1 - 2\eta + \eta^2}} = \frac{1}{1 - \eta} = 1 + \eta + \eta^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n P_n(\xi) \rightsquigarrow P_n(\xi) = 1$$

- 3)  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ , d.h. Polynome mit geradem Index  $n$  enthalten nur gerade Potenzen von  $x$ , Polynome mit ungeradem Index  $n$  nur ungerade Potenzen von  $x$ .

da:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\xi\eta+\eta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi(-\eta)+(-\eta)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta)^n P_n(\xi) \stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (\eta)^n P_n(-\xi)$$

4)  $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$

Für den Fall  $q_1=q$ ,  $q_2 = +/- q$  erhalten wir:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos\vartheta) \pm \left(\frac{-d}{r}\right)^n P_n(\cos\vartheta) \right\}$$

$q_1=q, q_2=-q$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos\vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2qd}{r^2} \cos\vartheta + \frac{2qd^3}{r^4} P_3(\cos\vartheta) + \dots \right)$$

$q_1=q, q_2=+q$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r} \sum_{n=0,2,4,\dots} \left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos\vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2q}{r} + \frac{2qd^2}{r^3} P_2(\cos\vartheta) + \dots \right)$$

Einen speziellen Term der Form

$$\phi_n(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_n}{r^{n+1}} \cdot P_n(\cos\vartheta)$$

nennt man das Potential eines Multipoles ( $2^n$ -Pol).

Die Entwicklung

$$\phi(\vec{r}) = \sum_n \phi_n(\vec{r})$$

eine Multipolentwicklung.  $Q_n$  sind die Multipolmomente.

Monopol  $\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_0}{r} \quad (Q_0 = 2q)$

Dipol  $\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \cdot \cos\vartheta \quad (Q_1 = 2qd)$

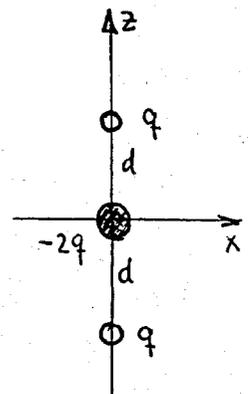
Quadrupol  $\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{r^3} \cdot \left(\frac{3}{2} \cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right) \quad (Q_2 = 2qd^2)$

Multipole sind punktförmig!

Im Gegensatz zum Dipol besitzt eine Ladungsverteilung zweier entgegengesetzt gleicher Ladungen auch höhere Multipolmomente. die jedoch umso weniger in Erscheinung treten, je größer der Abstand  $r$  verglichen mit  $d$  ist.

Um für  $r \gg d$  wenigstens approximativ in großen Abständen ein Quadrupolfeld zu erhalten, muß man eine Ladungsverteilung wählen, deren Gesamtladung und Dipolmoment Null ist. Bei einer um die  $z$ -Achse rotationssymmetrischen Ladungsverteilung braucht man dazu mindestens drei Punktladungen  $q, -2q, q$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2qd^2}{r^3} P_2(\cos\vartheta) + \frac{2qd^3}{r^5} P_3(\cos\vartheta) + \dots \right\}$$

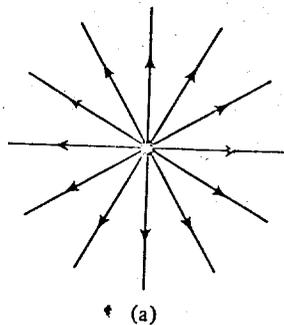


Äquipotentialflächen und Feldlinien von einigen Multipolen und Ladungsverteilungen.

Monopol:

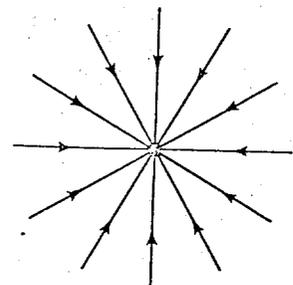
$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$



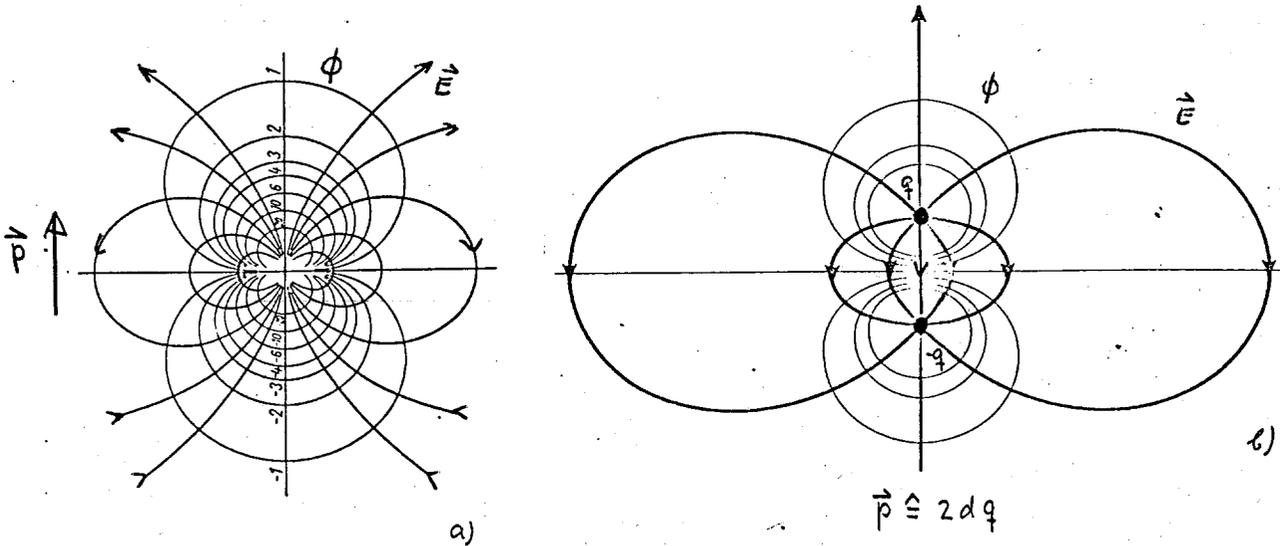
(a)

$q > 0$



(b)

$q < 0$



Feldlinien (stark ausgezogen) und Äquipotentiallinien (schwach ausgezogen) für einen vertikal stehenden Dipol (a) und zwei Punktladungen  $q, -q$  auf der  $z$ - Achse. (Abstand:  $2d$ ).

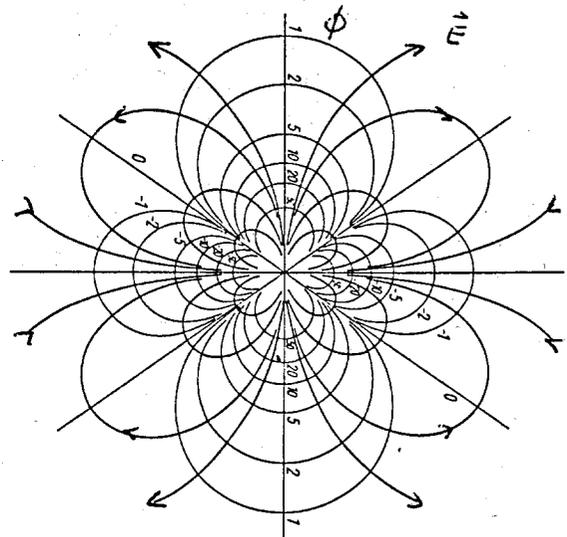
Dipol: 
$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

Feldlinien (stark ausgezogen) und Äquipotentiallinien (schwach ausgezogen) für einen gestreckten, auf der  $z$ - Achse liegenden Quadrupol.

Quadrupol:

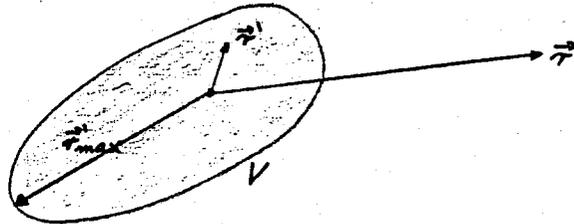
$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r^3} P_2(\cos\vartheta)$$



## 5 Multipolentwicklung für beliebige Ladungsverteilungen

Wir betrachten eine Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$ , welche außerhalb eines endlichen Volumens  $V$  identisch Null sein möge. Im Gegensatz zu dem im vorigen Kapitel diskutierten Fall zweier Punktladungen braucht  $\rho(\mathbf{r})$  keine besondere Symmetrie aufzuweisen.

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$



Unser Ziel ist die Multipolentwicklung des Potentials  $\Phi(\mathbf{r})$  für  $r \gg r'_{max}$  anzugeben. Den Nullpunkt des Koordinatensystems wählen wir innerhalb der Ladungsverteilung.

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right] + \frac{3}{8} \left[ \quad \right]^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \left[ -\frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^4} \right] + \dots \right\} \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \iiint_V \rho(\vec{r}') dV' + \frac{1}{r^2} \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r} dV' + \frac{1}{2r^3} \iiint_V \rho(\vec{r}') \left[ 3 \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2}{r^2} - r'^2 \right] dV' + \dots \right\}$$

In Komponentenschreibweise:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q_0}{r} + \frac{\sum_{i=1}^3 Q_i^{(1)} x_i}{r^3} + \frac{1}{r^5} \cdot \frac{3}{2} \sum_{i,j,k} Q_{i,j,k}^{(2)} x_i x_j x_k + \dots \right\}$$

Monopolmoment :  $Q^{(0)} = \iiint_V \rho(\vec{r}') dV'$

Dipolmomente :  $Q_i^{(1)} = \iiint_V \rho(\vec{r}') \cdot x_i' dV'$

Quadrupolmomente:  $Q_{i,j,k}^{(2)} = \iiint_V \rho(\vec{r}') \left[ x_i' x_j' x_k' - \frac{1}{3} (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) \delta_{ijk} \right] dV'$

Abkürzung:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$

Die drei Zahlen  $Q_1^{(1)}$ ,  $Q_2^{(1)}$ ,  $Q_3^{(1)}$  bilden einen Vektor  $P = (Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)})$ , das Dipolmoment.

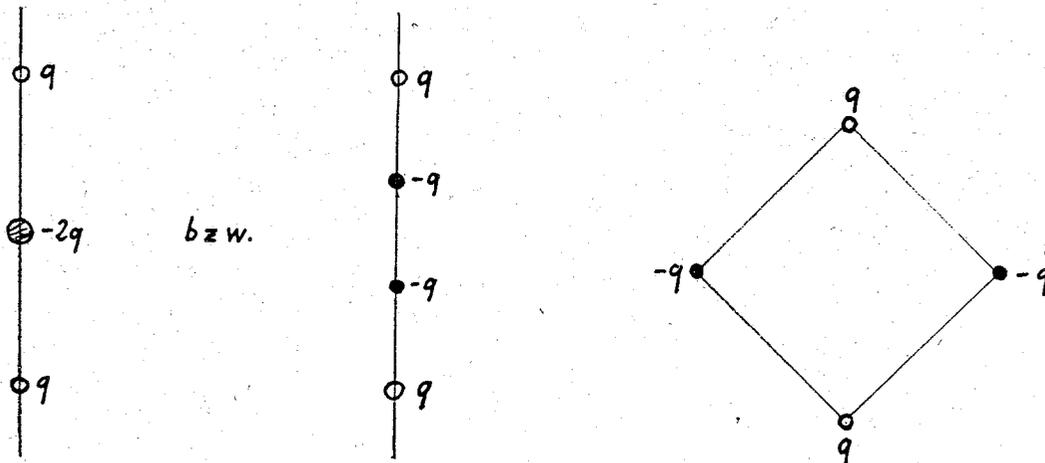
Der Quadrupolanteil des Feldes wird dagegen von einem symmetrischen Tensor zweiter Stufe festgelegt, dessen 9 Komponenten in kartesischen Koordinaten durch  $Q_{ik}^{(2)}$  gegeben werden. In Form einer 3x3 Matrix angeordnet lautet  $Q^{(2)}$ :

	x	y	z
x	$\iiint_V \rho(\vec{r}') (x'^2 - \frac{1}{3} r'^2) dV'$	$\iiint_V \rho(\vec{r}') x' y' dV'$	$\iiint_V \rho(\vec{r}') x' z' dV'$
y	$\iiint_V \rho(\vec{r}') y' x' dV'$	$\iiint_V \rho(\vec{r}') (y'^2 - \frac{1}{3} r'^2) dV'$	$\iiint_V \rho(\vec{r}') y' z' dV'$
z	$\iiint_V \rho(\vec{r}') z' x' dV'$	$\iiint_V \rho(\vec{r}') z' y' dV'$	$\iiint_V \rho(\vec{r}') (z'^2 - \frac{1}{3} r'^2) dV'$

Der Quadrupoltensor hat folgende Eigenschaften:

- 1)  $Q^{(2)}$  ist symmetrisch, d.h.  $Q_{ik} = Q_{ki}$ .  
(Eine symmetrische  $3 \times 3$  Matrix hat 6 unabhängige Komponenten)
- 2)  $\text{Spur } Q^{(2)} = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$   
 $Q^{(2)}$  hat demnach nur 5 unabhängige Komponenten.
- 3) Da  $Q^{(2)}$  reell und symmetrisch ist, kann man  $Q^{(2)}$  auf "Hauptachsen" transformieren. Dies besagt, daß man ein orthogonales Koordinatensystem so wählen kann, daß  $Q^{(2)}$  diagonal wird. Da man zur Festlegung des Koordinatensystems drei Winkel braucht, verbleiben zur Kennzeichnung des Quadrupolmoments noch zwei Zahlen. (zum Vergleich: Dipolmoment: 1 Zahl)

Außer dem "gestreckten" Quadrupol, den wir bereits in § 4 kennengelernt haben, gibt es daher für einen Quadrupol noch eine andere Konfiguration von Ladungen, deren Feld jedoch nicht mehr rotations-symmetrisch um die z-Achse ist.



gestreckter Quadrupol

ebener Quadrupol

Um die Unabhängigkeit des Tensors  $Q^{(2)}$  von einem speziellen Koordinatensystem zum Ausdruck zu bringen, benutzen wir das dyadische Produkt zweier Vektoren:

dyadisches Produkt von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  :  $\vec{a} \vec{b} = \vec{a} : \vec{b}$

Eigenschaften:

$$\vec{a} \vec{c} = (\vec{a} : \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} : \vec{c})$$

$$d \vec{a} \vec{b} = d(\vec{a} : \vec{b}) = (\vec{d} : \vec{a}) \vec{b}$$

Es ist  $\vec{a} : \vec{b} \neq \vec{b} : \vec{a}$ . Auch hängt die Wirkung von  $\vec{a} : \vec{b}$  davon ab, ob man von links oder von rechts mit einem Vektor  $\vec{c}$  bzw.  $\vec{d}$  multipliziert.

(Beachte den Doppelpfeil über  $\vec{T}$ ). Die Rechenregeln sind die, der Matrizenmultiplikation:

$$\vec{T} \vec{c} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^3 T_{1k} c_k \\ \sum_k T_{2k} c_k \\ \sum_k T_{3k} c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \sum_k b_k c_k$$

Hierbei haben wir  $T_{ik} = a_i b_k$  verwendet. Analog für

$$\vec{d} \vec{T} = (d_1, d_2, d_3) \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^3 d_k T_{k1} \\ \sum_k d_k T_{k2} \\ \sum_k d_k T_{k3} \end{pmatrix} = \sum_k d_k a_k (b_1, b_2, b_3)$$

$\vec{T}$  ist ein linearer Operator. In dyadischer Bezeichnungsweise ist

$$\vec{Q}^{(2)} = \iiint \rho(\vec{r}') (\vec{r}' : \vec{r}' - \frac{1}{3} r'^2 \vec{1}) dV'$$

Quadrupolanteil des Potentials (der Faktor  $\frac{3}{2}$  ist Konvention)

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{3}{2} \vec{r} \vec{Q}^{(2)} \vec{r}}{r^5}$$

Das Feld eines Quadrupols erhalten wir nach:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad } \phi = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} \left\{ (\vec{r} \vec{Q}^{(2)} \vec{r}) (-5) \frac{(\vec{r})}{r^6} + \frac{1}{r^5} (\vec{Q}^{(2)} \vec{r} + \vec{r} \vec{Q}^{(2)}) \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^4} \left\{ \frac{15}{2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \vec{Q}^{(2)} \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \frac{3}{2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \vec{Q}^{(2)} + \vec{Q}^{(2)} \frac{\vec{r}}{r} \right) \right\} \end{aligned}$$

Achtung!

Für eine beliebige Ladungsverteilung hängt der Wert des Dipol- oder Quadrupolmoments etc. (entsprechend den Koordinaten des Schwerpunkts einer Massenverteilung) im allgemeinen von der Wahl des Koordinatenursprungs ab.

$$\vec{r}' = \vec{r}'' + \vec{R}$$

$$\tilde{Q}_1 = \sum_n q_n (\vec{r}_n'' + \vec{R}) = \sum_n q_n \vec{r}_n'' + \vec{R} \cdot \sum_n q_n = \vec{Q}_1 + \vec{R} \cdot Q_0$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_2 &= \sum_n q_n (\vec{r}_n'' + \vec{R}) : (\vec{r}_n'' + \vec{R}) - \frac{1}{3} (\vec{r}_n'' + \vec{R})^2 \mathbb{1} \\ &= \vec{Q}_2 + (\vec{R} : \vec{Q}_1 + \vec{Q}_1 : \vec{R}) + Q_0 \left( \frac{2}{3} \vec{R}^2 \mathbb{1} + \vec{R} : \vec{R} \right) - \frac{2}{3} \vec{R} \cdot \vec{Q}_1 \mathbb{1} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\tilde{Q}_1 = \vec{Q}_1 \quad : \text{wenn die Gesamtladung des Systems null ist, } Q_0 = 0$$

$$\tilde{Q}_2 = \vec{Q}_2 \quad : \text{wenn } Q_0 = 0 \text{ und das Dipolmoment } \vec{Q}_1 = 0 \text{ ist.}$$

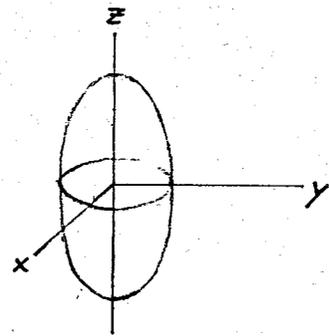
Einige Eigenschaften von Tensoren zweiter Stufe werden wir in II.8 untersuchen. Ein systematischer Weg, mit dem wir die höheren Multipole, insbesondere die unabhängigen Größen, finden können, wird uns in II.10 zu den Kugelfunktionen führen.

Als erste Anwendung berechnen wir das Quadrupolmoment eines homogen geladenen Rotationsellipsoids, dessen Symmetrieachse mit der z-Achse zusammenfällt.

$$\text{Ellipsoid : } \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

a, b sind die Hauptachsen des Ellipsoids.

$$\text{Ladungsdichte } \rho_0 = \frac{Q}{V} \quad V = \frac{4\pi}{3} a^2 b$$



$$Q_{xx} = \iiint_V \rho_0 \left( x'^2 - \frac{1}{3} r'^2 \right) dV'$$

$$Q_{yy} = \iiint_V \rho_0 \left( y'^2 - \frac{1}{3} r'^2 \right) dV' = Q_{xx} \quad (\text{durch Umbenennen von } y' \leftrightarrow x')$$

$$Q_{zz} = -(Q_{xx} + Q_{yy}) = -2Q_{xx} \quad (\text{da Spur } \vec{Q}^{(2)} = 0)$$

$$Q_{xy} = \iiint_V \rho_0 x' y' dV' = 0$$

$$Q_{xz} = Q_{yz} = 0$$

Zur Berechnung von  $Q_{xx}$  führen wir die folgende Maßstabsänderung durch:

$$x'' = \frac{b}{a} x' \quad y'' = \frac{b}{a} y' \quad z'' = z' \quad dV' = \left(\frac{a}{b}\right)^2 dV''$$

Hierbei geht das Ellipsoid in eine Kugel  $K_b$  vom Radius  $b$  über

$$Q_{xx} = \rho_0 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \iiint_{K_b} \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^2 x''^2 - \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{a}{b}\right)^2 (x''^2 + y''^2) + z''^2 \right] \right\} dV''$$

Aus Symmetriegründen ist außerdem:

$$\iiint_{V_k} x''^2 dV'' = \iiint_{V_k} y''^2 dV'' = \iiint_{V_k} z''^2 dV'' = \frac{1}{3} \iiint_{V_k} r''^2 dV''$$

$$\iiint r^2 dV = \iiint r^2 \cdot r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 4\pi \cdot \frac{b^5}{5}$$

$$Q_{xx} = \rho_0 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{1}{3} \right\} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4\pi b^5}{5} = \frac{4\pi}{45} a^2 b (a^2 - b^2) \rho_0 = \frac{Q}{15} (a^2 - b^2)$$

$$Q_{zz} = -2 Q_{xx} = \frac{2}{15} Q (b^2 - a^2)$$

Der Quadrupolanteil des Feldes ist:

$$\phi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^5} \cdot \frac{3}{2} \cdot Q_{zz} \left( z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \left( \frac{3}{2} Q_{zz} \right) \cdot \left( \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right)$$

Üblicherweise bezeichnet man  $\frac{3}{2} Q_{zz} = Q_2$  als das Quadrupolmoment einer um die z-Achse rotationssymmetrischen Ladungsverteilung.

$$Q_2 = \frac{3}{2} Q_{zz} = \frac{1}{5} Q (b^2 - a^2)$$

$Q_2 > 0$  für langgestreckte Ellipsoide:  $b > a$

$Q_2 < 0$  für abgeplattete Ellipsoide:  $b < a$

$Q_2$  ist ein Maß für die Abweichungen der Ladungsverteilung von der Kugelgestalt bez. für die Abweichungen des Potentials vom  $1/r$  Gesetz.

Literatur: Cheston: Elementary Theory of Electric and Magnetic Fields

Mit Hilfe der Kugelfunktionen läßt sich nun die gesamte

Multipolentwicklung eines beliebigen Potentials angeben. (siehe II-10)

Wir gehen aus von

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

und entwickeln: ( $\alpha = \angle \vec{r}, \vec{r}'$ )  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos \alpha) \quad r > r'$

Benutzung des Additionstheorems

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{r^{\ell+1}} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) \frac{4\pi}{2\ell+1} \iiint_V \rho(\vec{r}') r'^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\vartheta', \varphi') dV'$$

Multipolreihe

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{q_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$$

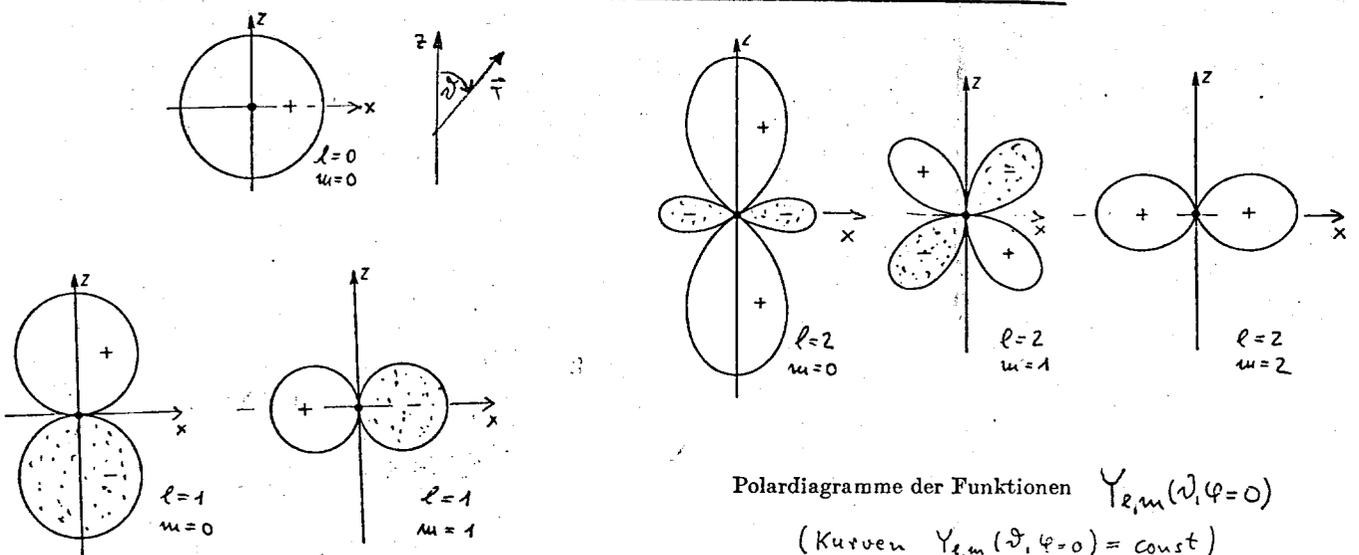
Multipolmomente

$$q_{\ell,m} = \frac{4\pi}{2\ell+1} \iiint_V \rho(\vec{r}') r'^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\vartheta', \varphi') r'^2 \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi'$$

Beachte, daß wegen der unterschiedlichen Normierung von  $P_\ell(\cos\vartheta)$  und  $Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$  die Multipolmomente  $q_{\ell,m}$  verschieden von  $Q_{i,k}$  sind!

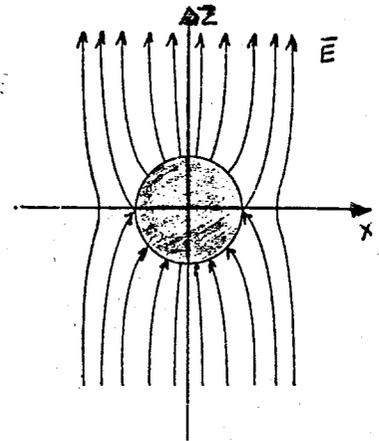
Ein Multipol der Ordnung  $\ell$  hat  $2\ell+1$  unabhängige Komponenten. z. B.

Monopol	$\ell=0$	1 Komponente : $Q_0$	(Skalar)
Dipol	$\ell=1$	3 Komponenten : $Q_i$ ; bzw. $\vec{P}$	(Vektor)
Quadrupol	$\ell=2$	5 Komponenten : $Q_{i,k}$ ; $q_{2,m}$	(Tensor zweiter Stufe)
Oktupol	$\ell=3$	7 Komponenten : $Q_{i,k,l}$ ; $q_{3,m}$	(Tensor dritter Stufe)



§ 6 Feld einer Metallkugel in einem angelegten homogenen Feld

Bei Abwesenheit der Metallkugel sei das angelegte Feld  $E = E_{as}$  homogen in Richtung der z-Achse. Wir wollen untersuchen, wie dieses Feld durch Einbringen einer Metallkugel verzerrt wird.



Asymptotisches Feld  $\vec{E}_{as} = E_0 \vec{e}_z$

$\phi_{as} = -E_0 z$

Die Kugel befinde sich auf dem Potential  $\phi_0$ . Wir versuchen nach Rezept b) von die Lösung für den Außenraum der Kugel,  $r \geq R_0$ , durch Lösungen der Laplacegleichung  $\Delta \phi = 0$  aufzubauen.

Kugelkoordinaten:  $\phi(\vec{r}) = R(r) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$

DGlg. für  $R(r)$ :  $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = 0$

Lösungsansatz:  $R(r) = r^n \quad n(n+1) = l(l+1)$ . d.h.  $n=l, -l-1$

Neben der uns aus §5 schon bekannten Lösung  $r^{-(l+1)} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$  gibt es daher noch die Lösung  $r^l Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ , die linear unabhängig von  $r^{-(l+1)} Y_{l,m}$  ist.

Allgemeine Lösung von  $\Delta \phi = 0$  in Kugelkoordinaten:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( a_{l,m} r^l + b_{l,m} r^{-(l+1)} \right) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

$a_{l,m}$  und  $b_{l,m}$  bestimmen wir aus den Randbedingungen. Da das Problem rotationssymmetrisch um die z-Achse ist wird  $\phi = \phi(\vec{r}, \vartheta)$ , d.h es können nur Glieder mit  $m=0$  auftreten. Statt  $Y_{l,0}(\vartheta, \varphi)$  verwenden wir die Legendre-Polynome  $P_l(\cos \vartheta)$ .

rotationssymmetrische Lösung:  $\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos \vartheta)$

"Randbedingung"  $r \rightarrow \infty$  :  $\phi(\vec{r}) \rightarrow \phi_{as}(\vec{r}) = -E_0 z = -E_0 r \cos \vartheta$

d.h. :  $A_0 =$  zunächst beliebig

$A_1 = -E_0$

$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \dots = 0$

Neutralität der Kugel:  $B_0 = 0$  da  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{F} = Q \equiv 0$  für eine Kugel  $\mathcal{V}$  um  $\vec{r}=0$  mit Radius  $r > R_0$ .

Die noch unbekanntenen Konstanten  $A_0, B_1, B_2, \dots$  werden bestimmt durch die Randbedingungen auf der Metall-Kugeloberfläche.

Randbedingung:  $r = R_0: \phi(R_0, \vartheta) = \phi_0 = \text{const.}$

$$\phi_0 = \underbrace{A_0}_{=\phi_0} + \underbrace{\left[-E_0 R_0 + \frac{B_1}{R_0^2}\right]}_{=0} P_1(\cos\vartheta) + \underbrace{\sum_{\ell=2}^{\infty} B_\ell R_0^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\vartheta)}_{=0}$$

Vollständigkeit und lineare Unabhängigkeit der Legendre-Polynome liefert:

$$A_0 = \phi_0, \quad B_1 = E_0 R_0^3, \quad B_2 = B_3 = B_4 = \dots = 0$$

Ergebnis:

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 - E_0 r \cos\vartheta + R_0 E_0 \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \cos\vartheta \quad r \geq R_0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \cdot \vec{e}_z + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{P} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}}{r^5} \quad \vec{P} = 4\pi\epsilon_0 E_0 R_0^3 \vec{e}_z$$

Die Anwesenheit der Metallfläche in einem sonst homogenen Feld ist im Außenraum,  $r \geq R$ , einem reinen Dipolfeld äquivalent! Das Dipolmoment der Kugel ist  $|\vec{P}| = 4\pi\epsilon_0 E_0 R_0^3$ .

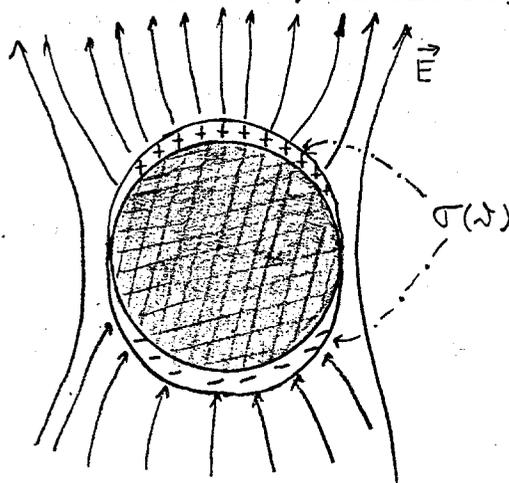
Radialkomponente von  $\vec{E}$ :  $E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = E_0 \left[1 + 2\frac{R_0}{r}\right] \cos\vartheta$

Tangentialkomponente:  $E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} = -R_0 E_0 \left[\frac{r}{R_0} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right] \sin\vartheta$

Auf der Oberfläche der Kugel wird demnach die Ladungsdichte

$$\sigma(\vartheta) = \epsilon_0 E_r = 3\epsilon_0 E_0 \cos\vartheta$$

influenziert.  $\int \sigma(\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta = 0$ , da die Kugel insgesamt elektrisch neutral ist

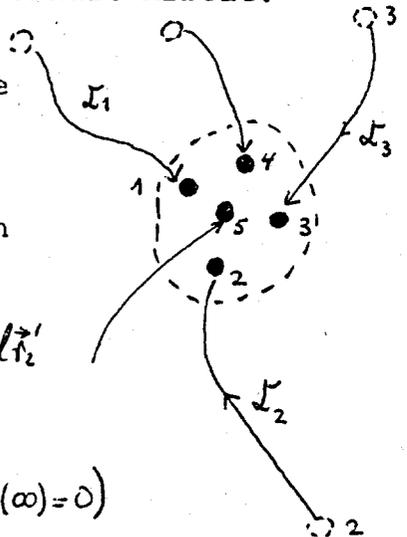


§ 7 Energie einer Ladungsverteilung

Bringt man eine Verteilung von Punktladungen von einem Zustand, in dem sich alle Ladungen „unendlich“ weit voneinander befinden, zusammen, so muß man Arbeit leisten, bzw. man erhält Arbeit.

Da das elektrostatische Feld ein Gradienten- (konservatives-) Feld ist, ist die betreffende Arbeit unabhängig von dem Weg, wie man die Ladungen zusammenbringt.

z.B.  $q_1$  bei  $\vec{r}_1=0$ , bringe  $q_2$  aus dem Unendlichen auf  $r_2 (\neq r_1)$



$$W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{r}'_2(\infty \rightarrow r_2)} q_2 \vec{E}_1(\vec{r}'_2) d\vec{r}'_2 = - \int q_2 \cdot \text{grad } \phi_1(\vec{r}'_2) d\vec{r}'_2$$

$$W = - q_2 \{ \phi_1(\infty) - \phi_1(\vec{r}_2) \} = q_2 \phi_1(\vec{r}_2) \quad (\phi_1(\infty)=0)$$

Wir zerlegen den Prozess des Heranholens von N Punktladungen aus dem Unendlichen auf endliche Abstände  $\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N$  in N-Schritte.

Ladung	von $\infty$ nach	erforderliche Arbeit
1	$\vec{r}_1$	$W_1 = 0$
2	$\vec{r}_2$	$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 } q_2$
3	$\vec{r}_3$	$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_1}{ \vec{r}_1 - \vec{r}_3 } + \frac{q_2}{ \vec{r}_2 - \vec{r}_3 } \right\} q_3$
...	...	...
N	$\vec{r}_N$	$W_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{u=1}^{N-1} \frac{q_u}{ \vec{r}_u - \vec{r}_N } q_N$

Insgesamt:

$$W = \sum_{m=1}^N W_m = \sum_{m=2}^N \sum_{u=1}^{m-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_m q_u}{|\vec{r}_m - \vec{r}_u|} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{\substack{u=1 \\ (m \neq u)}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_m q_u}{|\vec{r}_m - \vec{r}_u|}$$

Ist  $W > 0$ , so leistet das System beim Auseinanderziehen der Ladungen ( $\vec{r}_1 \rightarrow \infty, \vec{r}_2 \rightarrow \infty$  etc) Arbeit. Umgekehrt muß man für  $W < 0$  Arbeit leisten, um die Ladungen zu trennen.

Wir schreiben W um.

$$W = \sum_{m=1}^N \frac{1}{2} q_m \tilde{\phi}(\vec{r}_m) \quad \tilde{\phi}(\vec{r}_m) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{u=1 \\ (u \neq m)}}^N \frac{q_u}{|\vec{r}_u - \vec{r}_m|}$$

Bis auf den Term  $m=n$  ist  $\tilde{\phi}(\vec{r})$  identisch mit dem Potential  $\phi(\vec{r})$  der Ladungsverteilung. Den Term  $m=n$  müssen wir in  $W$  weglassen, weil er einer (unendlich großen) Selbstwechselwirkungsenergie einer Punktladung entspräche. Wir klammern diesen Punkt zunächst aus, indem wir kontinuierliche Ladungsverteilungen betrachten. ( $r=r'$  trägt nichts zum folgenden Integral bei).

$$W = \frac{1}{2} \iiint \phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV \quad \phi(\vec{r}) = \tilde{\phi}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}+\vec{r}'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}'-\vec{r}|} dV'$$

Wir wollen nun  $W$  in Abhängigkeit der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r})$  allein schreiben. Zunächst eliminieren wir  $\rho(\vec{r})$

$$\rho(\vec{r}) = -\epsilon_0 \Delta \phi \quad \leadsto \quad W = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint \phi(\vec{r}) \Delta \phi(\vec{r}) dV$$

$\phi \Delta \phi$  formen wir mit Hilfe der Rechenregeln für den Nablaoperator um:

$$\nabla(ABC\dots) = \nabla(ABC\dots) + \nabla(ABC\dots) + \nabla(ABC\dots)$$

$\nabla(ABC)$  etc ist nach den Regeln der Vektorrechnung so umzuformen, daß direkt nach  $B$  mit dem Pfeil steht. Je nachdem ob  $B$  ein Skalar, oder ein Vektor ist, wirkt  $\nabla$  verschieden.

$$\text{div}(\phi \vec{A}) = \nabla(\phi \vec{A}) + \nabla(\phi \vec{A}) = (\nabla\phi) \vec{A} + (\nabla \cdot \vec{A}) \phi = \vec{A} \cdot \text{grad} \phi + \phi \text{div} \vec{A}$$

$$\leadsto \text{div}(\phi \text{grad} \phi) = \text{grad} \phi \cdot \text{grad} \phi + \phi \text{div} \text{grad} \phi$$

$$\text{oder: } \phi \Delta \phi = \text{div}(\phi \text{grad} \phi) - (\text{grad} \phi)^2 = \text{div}(\phi \vec{E}) - \vec{E}^2$$

Einsetzen in  $W$ :

$$W = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint \text{div}(\phi \vec{E}) dV + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint \vec{E}^2 dV$$

Das erste Integral formen wir mit Hilfe des Gauss'schen Satzes um. Weiterhin fallen  $\phi(r)$  und  $\vec{E}(\vec{r})$  für räumlich begrenzte Ladungsverteilungen mindestens wie  $\phi \sim 1/r$ ,  $\vec{E}(r) \sim 1/r^2$  für  $r \rightarrow \infty$  ab.

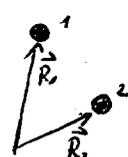
$$\iiint_{V(R)} \text{div}(\phi \vec{E}) dV = \oiint_{F(R)} \phi \vec{E} \cdot d\vec{F} \sim \frac{1}{R^3} 4\pi R^2 \sim \frac{1}{R} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty$$

Sofern wir das Integrationsvolumen über den ganzen Raum erstrecken wird der Oberflächenterm exakt gleich Null.

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{ganzer Raum}} \vec{E}^2 dV$$

Bemerkenswerterweise ist nun  $W \geq 0$ , denn  $\vec{E}^2 \geq 0$  !!

Dies liegt daran, daß W nun nicht nur die Wechselwirkungsenergie von Ladungen in verschiedenen Volumenelementen enthält, sondern auch die Energie, die nötig ist Ladungen innerhalb eines Volumenelements zu konzentrieren. Wir betrachten als Beispiel das Feld zweier Ladungen  $q_{1,2}$  bei  $\vec{R}_1$  und  $\vec{R}_2$ ,  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ :

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 dV = \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint \vec{E}_1^2 dV}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint \vec{E}_2^2 dV}_{\rightarrow \infty} + 2 \frac{\epsilon_0}{2} \iiint \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV \sim \phi_1(\vec{R}_2) q_2$$


Für zwei Punktladungen wären die "Selbstwechselwirkungsenergien" sogar unendlich groß.

Bei Änderung von Ladungen  $Q_i$  um  $dQ_i$  bzw.  $\rho(\vec{r})$  um  $\delta\rho(\vec{r})$  wird dem System elektromagnetisches Feld die Energie

$$\sum_{i=1}^N \phi(r_i) dQ_i = \iiint \phi(\vec{r}) \delta\rho(\vec{r}) dV$$

zugeführt. (D. h. nicht der Körper, der die Ladung trägt, sondern das Feld bekommt die Energie zu bzw. abgeführt). Dabei spielt es keine Rolle, wie in konkreten Fällen die Ladungsänderungen realisiert werden. Umformung des obigen Ausdrucks liefert wieder:

$$\begin{aligned} \iiint \phi(\vec{r}) \delta\rho(\vec{r}) dV &= \iiint \phi(\vec{r}) \text{div}[\epsilon_0 \delta\vec{E}] dV = \iiint \text{div}[\phi \epsilon_0 \delta\vec{E}] dV - \epsilon_0 \iiint \text{grad} \phi \cdot \delta\vec{E} dV \\ &= \epsilon_0 \iiint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{E}(\vec{r}) dV = \delta \iiint w(\vec{r}) dV \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Energiedichte:

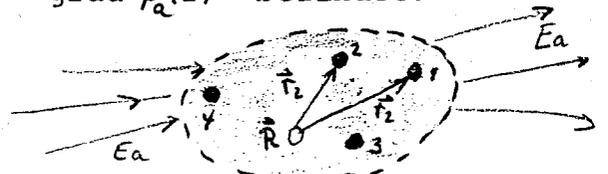
$$w(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r})$$

$w(\vec{r})$  kann man als Dichte der elektrischen Energie ansehen. Teilt man die gesamten Ladungsänderungen ein in Änderungen von "freien" Ladungen  $dQ^f$  und Änderungen von Dipolmomenten  $d\vec{P}$  ein, so erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^N \phi_i dQ_i^f - \epsilon_i d\vec{P}_i = \iiint [\phi(\vec{r}) \delta\rho(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{P}(\vec{r})] dV = \delta \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}) dV$$

Wir betrachten nun den Fall einer gegebenen Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$ , die sich in einem äußeren Feld  $\vec{E}_a(\vec{r}) = -\text{grad} \phi_a(\vec{r})$  befindet:

$$W = \sum_{n=1}^N q_n \phi_a(\vec{r}_n) \hat{=} \iiint \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV$$



Wir entwickeln  $\phi_a(\vec{r})$  um den Punkt  $\vec{R}$  innerhalb der Ladungsverteilung, den wir der Einfachheit halber als Nullpunkt des Koordinatensystems wählen.

$$\phi_a(\vec{r}) = \phi_a(0) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi_a}{\partial x_i} \Big|_0 \cdot x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial x_i \partial x_k} \Big|_0 \cdot x_i x_k + \dots$$

$$W = \phi_a(0) \underbrace{\iiint_{Q_0} \rho(\vec{r}) dV}_{Q_0} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi_a}{\partial x_i} \Big|_0 \underbrace{\iiint_{Q_i} \rho(\vec{r}) x_i dV}_{Q_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial x_i \partial x_k} \underbrace{\iiint_{Q_{ik}} \rho(\vec{r}) x_i x_k dV}_{Q_{ik}}$$

$\tilde{Q}_{ik}$  sind mit Ausnahme der Diagonalelemente, identisch mit den Quadrupolmomenten  $Q_{ik}$  von §13. Da weiterhin innerhalb des Probenvolumens für das äußere Feld  $\text{div } \vec{E}_a = -\Delta \phi_a = 0$  gilt, dürfen wir unter dem Integral  $x_i x_k$  durch  $x_i x_k - r^2 \delta_{ik}$  ersetzen; d.h. wir dürfen statt  $\tilde{Q}_{ik}$   $Q_{ik}$  schreiben.

$$W = \phi_a(0) Q_0 - \vec{E}_a(0) \cdot \vec{P} - \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial E_{ai}}{\partial x_k} \Big|_0 Q_{ik} + \dots$$

Die Kraftwirkung auf die Ladungsverteilung erhalten wir aus:

$$\vec{K} = -\text{grad} W(\vec{R})$$

Wir diskutieren im folgenden nur das erste Glied der Multipolbeiträge zu  $\vec{K}$ , welches ungleich Null ist.

1)  $Q_0 \neq 0$      $W(\vec{R}) = Q_0 \phi_a(\vec{R})$      $\vec{K} = Q_0 \cdot \vec{E}_a(\vec{R})$

2)  $Q_0 = 0$     Gesamtladung  $Q_0 = 0$ , Dipolmoment  $Q_i = (\vec{P})_i \neq 0$  ( $Q_i$  hängen  
 $Q_i \neq 0$     nicht von der Wahl des Koordinatenursprungs ab, siehe §1

$$W(\vec{R}) = -\vec{P} \cdot \vec{E}_a(\vec{R}) \quad \vec{K} = \text{grad} (\vec{P} \cdot \vec{E}) = (\vec{P} \cdot \text{grad}) \vec{E}$$

a) inhomogenes  $\vec{E}_a$ -Feld:  $d\vec{E}_i/dx_k \neq 0$      $\vec{K} \neq 0$

b) homogenes  $\vec{E}_a$ -Feld:     $\vec{K} = 0$  aber es gibt ein Drehmoment.  
 $\vec{D} = -dW/d\vartheta = -E_a \sin \vartheta = \vec{P} \times \vec{E}_a$

3)  $Q_0 = 0$     Gesamtladung und Dipolmoment sind Null.

$Q_i = 0$      $Q_{ik}$  hängt demnach nicht von der Wahl des

$Q_{ik} \neq 0$     Koordinatenursprungs ab. siehe §13).

$$W(\vec{R}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} Q_{ik} \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} Q_{ik} \frac{\partial E_{ai}}{\partial x_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} Q_{ik} \frac{\partial E_{ak}}{\partial x_i}$$

$$K_e(\vec{R}) = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} Q_{ik} \frac{\partial^3 \phi_a}{\partial x_i \partial x_k \partial x_e} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} Q_{ik} \frac{\partial^2 E_{ae}(x_i, x_k, x_e)}{\partial x_i \partial x_k}$$

a) homogenes  $\vec{E}_a$ -Feld:     $W = 0$      $\vec{K} = 0$      $\vec{D} = 0$

b) linear inhomogenes  $\vec{E}_a$ -Feld:  $W(\vec{R}) \neq 0$      $\vec{K} = 0$      $\vec{D} \neq 0$

c) beliebig inhomogenes  $\vec{E}_a$ -Feld:  $W(\vec{R}) \neq 0$      $\vec{K} \neq 0$      $\vec{D} \neq 0$

## Kap. IV: Das von stationären Strömen erzeugte magnetostatische Feld

### § 1 Vektorpotential

Für eine vorgegebene Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r})$  berechnet sich das Magnetfeld aus den beiden Maxwellgleichungen:

Grundgleichungen  
der Magnetostatik

$$\oint_{\vec{F}} \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{\tau} = \mu_0 \mathcal{I} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{F}$$

oder

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

Auf eine zweite Quelle für stationäre Magnetfelder, nämlich magnetisierte Materie bzw. magnetische Momente von Elementarteilchen, werden wir später eingehen.

Die obigen Gleichungen besagen, daß  $\vec{B}$  stets geschlossene Feldlinien hat und daß die Wirbelstärke von  $\vec{B}$  durch die Stromdichte  $\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$  gegeben ist.

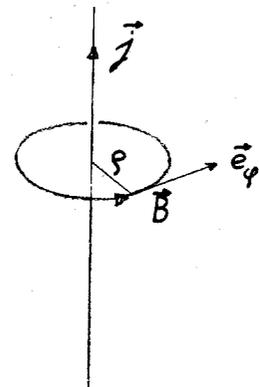
In einfach gelagerten Fällen kann man die Symmetrie von  $\vec{B}(\vec{r})$  erraten und den geschlossenen Integrationsweg  $\mathcal{L}$  dann so wählen, daß der Integrand konstant ist

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{\tau} = B_{\mathcal{L}}(\vec{r}) \cdot \oint_{\mathcal{L}} |d\vec{\tau}| = \mu_0 \cdot \mathcal{I}$$

#### Beispiel:

Feld eines unendlich langen, dünnen stromdurchflossenen Drahts.

Aus Symmetriegründen hat  $\vec{B}$  nur eine Tangentialkomponente,  $\vec{B}(\vec{r}, \varphi) = B_{\varphi}(\varrho) \vec{e}_{\varphi}$ , die außerdem nicht vom Polarwinkel  $\varphi$  abhängt. Wähle als Integrationsweg einen Kreis mit Radius  $\varrho \perp \vec{j}$ .  $\vec{j}$  geht durch den Mittelpunkt des Kreises.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\tau} = B_{\varphi}(\varrho) \cdot 2\pi\varrho \stackrel{!}{=} \mu_0 \cdot \mathcal{I} \quad \leadsto$$

$$\vec{B}(\varrho, \varphi) = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi\varrho} \cdot \vec{e}_{\varphi}$$

In komplizierten Fällen löst man die Maxwellgleichungen durch Einführung des Vektorpotentials  $\vec{A}(\vec{r})$ .

Wir gehen aus von:

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \quad \leadsto \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \\ \text{b) } \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Die Vektoroperation  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}$  formen wir um mit Hilfe der Beziehung:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Da  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi \equiv 0$  ist, bestimmt das Feld  $\vec{B}$  das Vektorpotential nur bis auf einen additiven Gradiententerm. Die Beschreibung des Magnetfelds über das Vektorpotential  $\vec{A}$  läßt daher noch folgende

Eichtransformation  $\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda(\vec{r})$

zu. Um den Term  $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A})$  los zu werden, wählen wir die Coulombbeingung:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad \leadsto \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \Lambda = \Delta \Lambda = 0$$

Im einfachsten Fall ist dies  $\Lambda = 0$

Gleichung für das Vektorpotential:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (\operatorname{div} \vec{A} = 0)$$

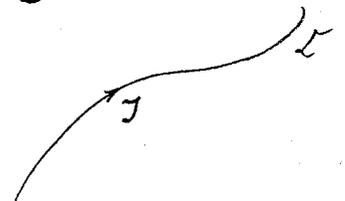
Jede Komponente von  $\vec{A}(\vec{r})$  z.B.  $A_x(x, y, z)$  erfüllt daher eine Poissongleichung, deren Lösung uns bereits aus der Elektrostatik bekannt ist.

Vektorpotential:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

bzw. bei dünnen Drähten entlang  $\mathcal{L}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\vec{j} d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



Aus  $\vec{A}(\vec{r})$  berechnen wir das Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{r})$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \text{rot} \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'$$

$$\text{rot}(f(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r})) = (\text{grad } f(\vec{r})) \times \vec{j}(\vec{r}) + f(\vec{r}) \text{rot } \vec{j}(\vec{r})$$

z.B. für die x-Komponente (differenziert nach  $\vec{r}$ , nicht nach  $\vec{r}'$ )

$$\text{rot}_{\vec{r}} \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \Big|_{x\text{-Komp.}} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{j_z(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{j_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

$$= j_z(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - j_y(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{(\vec{r}' - \vec{r})_y \cdot j_z(\vec{r}') - (\vec{r}' - \vec{r})_z \cdot j_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Big|_{x\text{-Komp.}}$$

Biot-Savart'sches Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} dV' \xrightarrow[\text{Leiter}]{\text{dünnere}} \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \times j d\vec{r}'}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}$$

Ebenso wie im Fall der Elektrostatik stellen die Formeln für  $\vec{A}(\vec{r})$  und  $\vec{B}(\vec{r})$  die gesuchte Lösung unseres Problems dar; in vielen Fällen ist es jedoch einfacher, direkt die Poissongleichung für  $\vec{A}$  zu integrieren und dann über  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  das Magnetfeld  $\vec{B}$  zu berechnen.

## §2 Beispiele für das Vektorpotential

a) homogenes Magnetfeld in z-Richtung

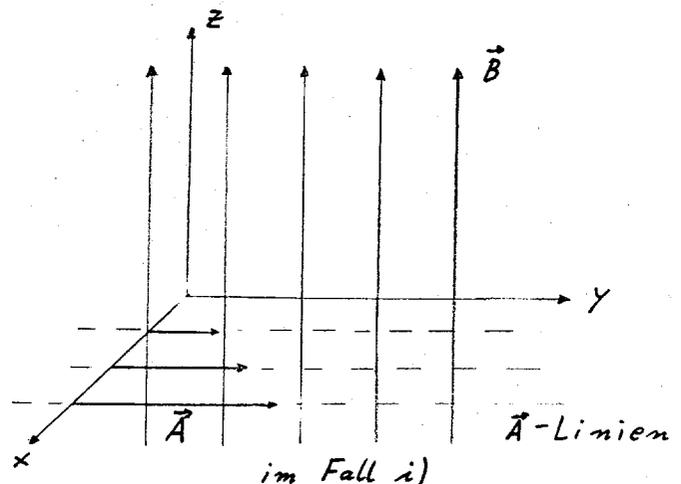
$$\vec{B} = (0, 0, B)$$

$$i) \vec{A} = (0, xB, 0)$$

$$ii) \vec{A} = (-yB, 0, 0)$$

$$iii) \vec{A} = \left(-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0\right) \equiv \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$

In allen 3 Fällen ist  $\text{div } \vec{A} = 0$ .



## b) langer, stromdurchflossener Draht

Das Magnetfeld  $\vec{B}$  ist uns bereits aus § 1 bekannt. Wir versuchen, diese Lösung durch Integration der Poissongleichung für  $\vec{A}$  zu finden. Der Draht liegt auf der z-Achse. In Zylinderkoordinaten gilt:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A_\rho(\rho, \varphi, z) &= \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_\rho(\rho, \varphi, z) = 0 \\ \Delta A_\varphi(\rho, \varphi, z) &= \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_\varphi(\rho, \varphi, z) = 0 \\ \Delta A_z(\rho, \varphi, z) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z(\rho, \varphi, z) = 0 \end{aligned} \right\} \rho \neq 0$$

Die gesuchte Lösung muß die folgenden Bedingungen erfüllen:

- $\vec{B}$  kann keine z-Komponente haben:  $\vec{A}(\vec{r})$ ;  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , kann daher so gewählt werden, daß  $\vec{A}(\vec{r})$  nur eine z Komponente hat.
- $\vec{B}$  ist rotationssymmetrisch um die z-Achse
- $\text{div } \vec{A} = 0$

Wir versuchen den Ansatz:  $\vec{A} = (A_\rho, A_\varphi, A_z)$  mit  $A_\rho = A_\varphi = 0$ ;  $A_z(\rho, \varphi, z) = A_z(\rho)$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial A_z(\rho)}{\partial \rho} \right) = 0 \leadsto A_z(\rho) = \alpha \cdot \ln \rho + \beta \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} = -\alpha \cdot \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$$

$\beta (=0)$  ist eine unwesentliche additive Konstante.  $\alpha$  bestimmen wir über das Ampère'sche Gesetz:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = -\frac{\alpha}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \mu_0 \cdot \mathcal{I} \leadsto \alpha = -\frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi}$$

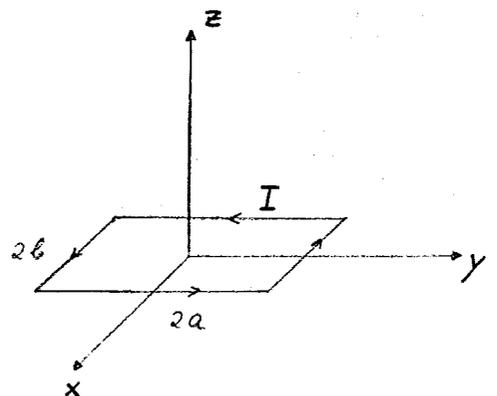
( $\mathcal{L}$ : Kreis parallel zur x-y Ebene mit  $x=y=0$  als Mittelpunkt)

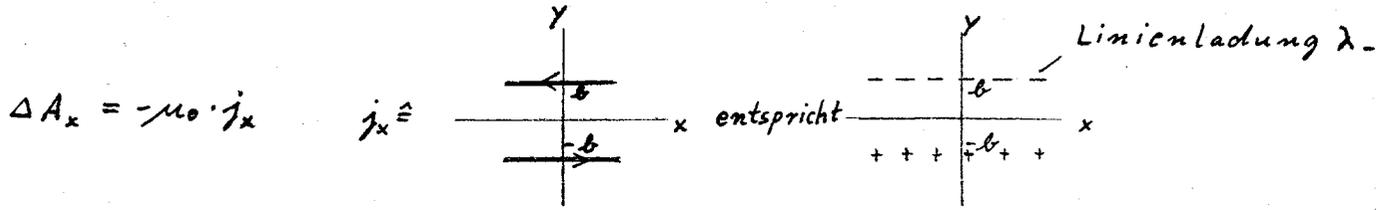
$$\text{Vektorpotential: } \vec{A}(\rho, \varphi, z) = -\frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi} \ln \rho \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{Magnetfeld: } \vec{B}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi \rho} \cdot \vec{e}_\varphi$$

## c) Stromdurchflossene, rechteckige Schleife

Wir lösen  $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$  durch Analogie-betrachtungen ( $\rho \leftrightarrow j_x, j_y, j_z$ ;  $\frac{1}{\epsilon_0} \leftrightarrow \mu_0$ )



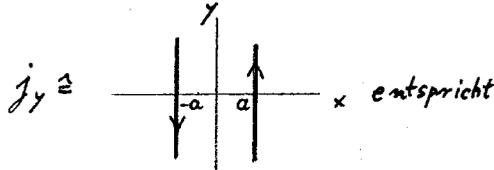


Dipolmoment:

$-2abI = -4abI$

$P_y = -bQ_+ + bQ_-$

$\Delta A_y = -\mu_0 \cdot j_y$



$Q_+ = \lambda_+ \cdot 2a$

Dipolmoment:

$+2abI = 4abI$

$P_x = aQ_+ - aQ_-$

$Q_- = \lambda_- \cdot 2b$

$\Delta A_z = 0$

wähle  $A_z = 0$

In der Dipolnäherung erhalten wir somit

$A_x = \frac{\mu_0 \cdot -4abIy}{4\pi r^3}$   $A_y = \frac{\mu_0 \cdot 4abIx}{4\pi r^3}$   $A_z = 0$

Die Bedingung  $\text{div } \vec{A} = 0$  ist hier automatisch erfüllt. Die drei Gleichungen für  $A_x, A_y, A_z$  schreiben wir kompakter

Vektorpotential eines magnetischen Dipols

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$\vec{m} = 4abI \cdot \vec{e}_z = I \cdot F \cdot \vec{e}_z$

In unserem Fall steht  $\vec{m}$  senkrecht auf der vom Strom umschlossenen Fläche  $F$ . Für beliebige Stromverteilungen ist:

$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV' \rightarrow I \cdot \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times d\vec{r}'$



Wir berechnen aus  $\vec{A}$  das Magnetfeld  $\vec{B}$ :

$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3mxz}{r^5}$

$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3myz}{r^5}$

$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) m$

Zusammenfassung der Komponenten

$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5} \right)$

liefert das Dipolfeld für  $\vec{B}$  in der uns gewohnten Form.

Kap. V. Zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder.

§1 Zustände, Observable und Dynamik des elektromagnetischen Felds: Teil 2. Energie, Impuls und deren Ströme.

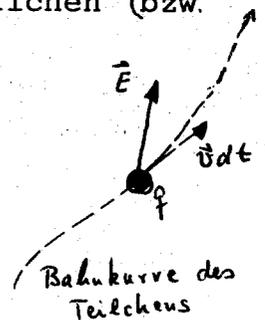
Das elektromagnetische Feld ist ein dynamisches System, d.h. es transportiert Energie, Impuls, Drehimpuls... Wie wir in III.7 für statische elektrische Felder erarbeitet haben, besitzt das Feld Energie, dessen räumliche Verteilung durch  $\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r})$  gegeben ist. Für statische Magnetfelder hätten wir analog  $\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r})$  erhalten. Daß das Feld Energie (und auch Impuls, Drehimpuls) "hat", sieht man besonders deutlich bei zeitabhängigen Feldern, welche Energie (und Impuls, Drehimpuls...) von einem mechanischen System aufgenommen können, um sie dann mit endlicher Geschwindigkeit durch den leeren Raum zu transportieren. (z.B. Abstrahlung von Wellen durch beschleunigte Ladungen und anschließender Empfang der Wellen mit einer Antenne).

A: Zunächst befassen wir uns mit der Energie und dem Energiestrom. Es liege ein zeitabhängiges Feld vor, beschrieben durch  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , das Arbeit an geladenen Teilchen (bzw. einer Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ) leistet.

Während  $dt$  vom Feld  
an den Strömen geleistete  
Arbeit, bzw. erbrachte  
Leistung

$$dW = q \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} dt$$

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) dV$$



Wir eliminieren  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  (das ganz beliebig sein kann, und außerdem auch von  $\vec{E}$ , and  $\vec{B}$  abhängen darf!) mit Hilfe des Ampere'schen Gesetzes;

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

und benutzen die Relation

$$\text{div } \vec{E} \times \vec{B} = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}$$

$$\approx \frac{dW}{dt} = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \iiint_V dV \left\{ \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} = \iiint_V dV \left\{ \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot} \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{div} \left[ \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right] \right\}$$

Um Symmetrie in  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  herzustellen ersetzen wir  $\text{rot} \vec{E}$ :  
 $\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t)$  (Induktionsgesetz). Die vom Feld an den Strömen geleistete Arbeit ist dann

$$\frac{dW}{dt} = - \iiint_V dV \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right] + \text{div} \left[ \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right] \right\}$$

Andererseits ist nach Definition von W

$$\iiint_V dV \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right] + \text{div} \left[ \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right] \right\} = - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$

Da diese Relation für beliebige Volumina V gilt, schließen wir auf die differentielle Form

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} w(\vec{r}, t) + \text{div} \vec{S}(\vec{r}, t) = - \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)}$$

welche die lokale Erhaltung der Energie ausdrückt (siehe §6)

Energiedichte des Felds

$$w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t)$$

Energiestromdichte  
(Poynting'scher Vektor)

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

Quellen bzw Senkendichte  
für die Energie des EMFs

$$\sigma(\vec{r}, t) = - \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Die Energie des Systems elektromag. Felds kann sich innerhalb eines Volumens V daher aus zwei Gründen ändern:

$$\frac{\partial w(\vec{r}, t)}{\partial t} = - \text{div} \vec{S}(\vec{r}, t) + \sigma(\vec{r}, t)$$

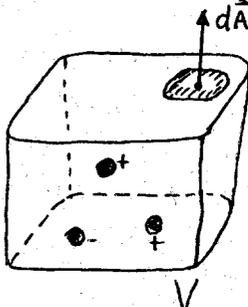
$$\frac{dW_F(t)}{dt} := \iiint_V w(\vec{r}, t) d^3r = - \underbrace{\oint_{\partial(V)} \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A}}_a + \underbrace{\iiint_V \sigma(\vec{r}, t) dV}_b$$

- a) über  $\text{div} \vec{S}$  bzw.  $-\oint \vec{S} d\vec{A}$  ; d.h. durch heraus (oder herein) strömen aus dem (in das) Volumen  $V$  über seine Oberfläche  $f(V)$  . In diesen Fall bleibt die Energie dem System el. mag Feld erhalten; sie wird lediglich räumlich umverteilt.
- b) über  $\sigma(\vec{r},t) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$ . Dieser Energiebetrag verschwindet gänzlich aus dem Feld (bzw. taucht im Feld auf), und wird dem mechanischen System geladener Teilchen, das  $\vec{j}(\vec{r},t)$  beschreibt, zugeführt (bzw. entnommen).

$$\frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = + \iiint_V \vec{j}(\vec{r},t) \cdot \vec{E}(\vec{r},t) dV$$

Wir formulieren dann den Energiesatz in der folgenden Form:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{l} W_{\text{mech}} \\ \uparrow \\ \text{Energie der} \\ \text{geladenen} \\ \text{Teilchen im} \\ \text{Volumen } V. \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} W_F \\ \uparrow \\ \text{Energie des} \\ \text{Felds in } V. \end{array} \right\} = \oint_{f(V)} -\vec{S} d\vec{A}$$



Die Anzahl der Teilchen in  $V$  soll konstant bleiben.

durch die Oberfläche von  $V$  geströmte Energie.

### Vorsicht

Wir haben zwar die Energie des Felds über die Lorentzkraft gewonnen, trotzdem spielten Energie (Impuls, Drehimpuls) eine fundamentaler Rolle als z.B. die Kraft.

Es ist naheliegend, aber nicht zwingend, die Energie (Impuls, Drehimpuls) räumlich zu lokalisieren. Physikalisch wichtig sind die Änderungen der Energie (Impuls, Drehimpuls...)

Nicht immer beschreibt der Poyntingvektor  $\vec{S}$  den Energiestrom, in dem Sinn, daß ein Energiefluss durch ein Fläche beobachtbar ist. Nur  $\text{div} \vec{S}$  bzw.  $\oint \vec{S} d\vec{A}$  ist physikalisch relevant, so die "Lehrmeinung".  
 Beispiel: statisches, homogenes  $\vec{E}$ -Feld, dem ein stat. homog.  $\vec{B}$ -Feld senkrecht überlagert ist.  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \neq 0$  aber  $\text{div} \vec{S} = 0$  !

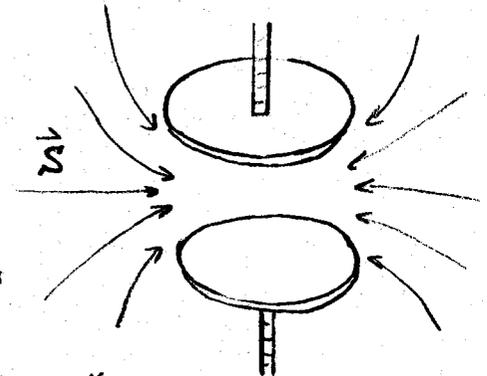
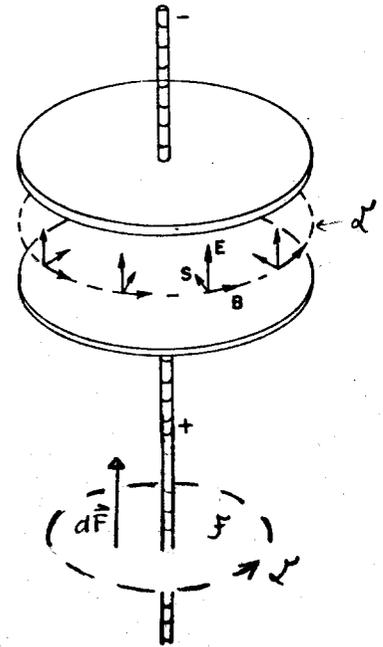
Beispiel:

Energiestrom beim (langsamen) aufladen eines Plattenkondensators. Die Zuleitungen sollen einen vernachlässigbar kleinen Widerstand haben.

Energie im Kondensator:  $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (\pi R^2 h)$

zeitliche Änderung:  $\frac{dW}{dt} = \epsilon_0 E \dot{E} (\pi R^2 h)$

Wenn der Kondensator aufgeladen wird, so ändert sich  $\vec{E}$ , also auch die Energie  $W$ . Energie muß deshalb von "irgendwoher" in das Innere des Kondensators strömen. Strömt diese Energie mit den zugeführten Ladungen durch den Draht in das Innere des Kondensators?? NEIN !! Dies geht deswegen schon nicht, weil  $\vec{E}$  senkrecht zu den Platten steht und  $\vec{E} \times \vec{H}$  parallel zu den Platten wäre. Die Energie strömt daher vom Außenraum in das Innere des Kondensators.



Energiestrom durch die Mantelfläche des Zylinders:

$$S \cdot 2\pi R h = 2\pi R h E H$$

Berechnung des Magnetfelds:

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = \frac{d}{dt} \iint \vec{D} d\vec{F} + \iint \vec{j} d\vec{F}$$

$$2\pi R H = \epsilon_0 \dot{E} \pi R^2 = 0 \text{ da } \vec{j} \perp d\vec{F} \text{ oder } \vec{j} = 0.$$

$$H(R) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \dot{E} R$$

Energiestrom in das Innere des Plattenkondensators:

$$2\pi R h E H = \epsilon_0 E \dot{E} (\pi R^2 h) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \pi R^2 h \right)$$

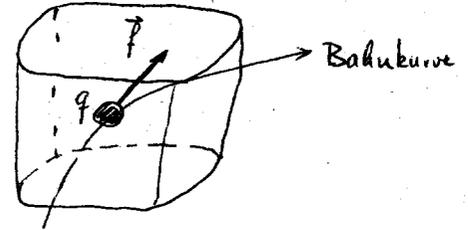
$2\pi R h S$  ist also identisch mit  $\dot{W}$ .

Literatur:

Falk Ruppel, Energie und Entropie, §7  
 Feynman lectures, Vol II, Kap. 27 (Energie, Impuls, Beispiel)  
 Becker - Sauter, Theorie der Elektrizität, S.157 (Impuls des Felds)

B: Impuls und Impulsstrom des Felds

Wir betrachten ein System geladener Teilchen im Volumen  $V$ , und nehmen an, daß kein Teilchen  $V$  verlässt.



Änderung des Gesamtimpulses der Teilchen in  $V$

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mech}}}{dt} = \vec{F}(t) = \iiint \vec{f}(\vec{r}, t) dV$$

Lorentzkraftdichte

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

Wir eliminieren in  $\vec{f}(\vec{r}, t)$   $\rho$  und  $\vec{j}$  durch  $\vec{E}, \vec{B}$  und formen geeignet um, so daß wir auf die Form eines Erhaltungssatzes stoßen.

MGLn:  $\rho(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \quad , \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\leadsto \vec{f}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\operatorname{rot} \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}$

Umformung:  $\vec{B} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

MGL.  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}$

$\leadsto \vec{f}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$

Um die Symmetrie in  $\vec{E}, \vec{B}$  zu wahren, addieren wir  $\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \operatorname{div} \vec{B} \equiv 0$

$\leadsto \vec{f}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} \} + \frac{1}{\mu_0} \{ \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B} \} - \frac{\partial}{\partial t} \{ \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \}$

Mit Hilfe dieser Umformungen läßt sich dann der Impulssatz schreiben als:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \vec{P}_{\text{mech}} + \iiint \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} dV \right\} = \iiint \left\{ \epsilon_0 [ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} ] + \frac{1}{\mu_0} [ \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B} ] \right\} dV$$

↑
↑
↑

Imp. d. Teilchen
Impuls des Felds
Aus dem Volumen  $V$  heraus (bzw. herein) gestromter Impuls des Felds

Impulsdichte des Felds:

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \equiv \frac{1}{c^2} \vec{S}(\vec{r}, t)$$

Um die Impulsstromdichte des Felds zu erhalten, muss man das Volumenintegral auf der rechten Seite der Gleichung in ein Oberflächenintegral umformen, d.h. der Integrand muss sich als Divergenz:  $\text{div} \vec{T}$  schreiben lassen. Allerdings ist dies hier wesentlich verzwickter, als bei der Energiestromdichte. Dies liegt daran, daß  $\omega(\vec{r}, t)$  ein Skalar,  $\vec{p}(\vec{r}, t)$  dagegen ein Vektor ist;  $\text{div} \vec{T}$  muss daher ebenfalls ein Vektor sein, d.h.  $\vec{T}$  ist ein Tensor zweiter Stufe! (der sog. Maxwell'sche Spannungstensor).

Vektorrelation:  $\frac{1}{2} \text{grad } \vec{B}^2 = (\vec{B} \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{B}$

$$\wedge \vec{B} \text{ div } \vec{B} - \vec{B} \times \text{rot } \vec{B} = \vec{B} \text{ div } \vec{B} + (\vec{B} \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \text{grad } \vec{B}^2$$

$$:= \text{div} [\vec{B} : \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{B}^2 \mathbb{1}]$$

Definition der Divergenz  
eines Tensors zweiter  
Stufe

$$\text{div} \vec{T} \Big|_k = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial T_{lk}(\vec{r})}{\partial x_l}$$

Maxwell'scher  
Spannungstensor

$$\vec{T} = \epsilon_0 \vec{E} : \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} : \vec{B} - \frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) \mathbb{1}$$

$$T_{ik} = \epsilon_0 E_i E_k + \frac{1}{\mu_0} B_i B_k - \omega(\vec{r}, t) \delta_{ik}$$

Impulserhaltungssatz des Gesamtsystems "geladene Teilchen plus el. mg. Feld"

$$\frac{d}{dt} \left\{ \vec{P}_{\text{mech}} + \iiint_V \vec{p}(\vec{r}, t) dV \right\} = \iiint_V \text{div} \vec{T} dV = \oint_{\mathcal{F}(V)} (\vec{T} \cdot \vec{n}) dA$$

Impuls der  
Teilchen  
in V.

Impuls des  
Felds in  
V.

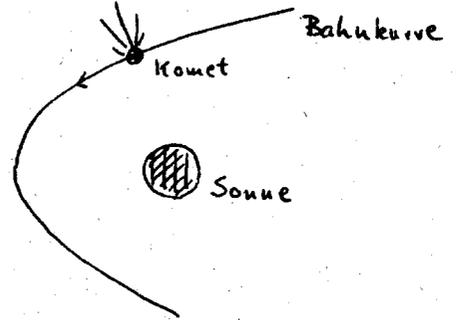
Impulsstrom des Felds  
durch die Oberfläche  
von V. ( $\vec{n}$ : Normalen-  
vektor)

In differentieller Form lautet der Impulssatz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{p}(\vec{r}, t) + \text{div}(-\vec{T}) = -\vec{f}(\vec{r}, t) = -[\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}]$$

d.h.  $-\vec{T}$  bezeichnet den Impulsstromdichtetensor und  $-\vec{f}(\vec{r}, t)$  die Quell- (bzw. Senken) dichte für den Impuls des elektromagnetischen Felds.

Der Impulsstrom elektromagnetischer Strahlung spiegelt sich wieder im Lichtdruck. Die Richtung von Kometenschweif wird jedoch durch den etwa 1000 mal stärkeren "Sonnenwind" bestimmt.



Neben Energie, Impuls hat das Feld auch Drehimpuls und es gibt einen Drehimpulsstrom. Die Ableitung dieser Größen ist allerdings noch komplizierter als für den Impuls.

$$\text{Drehimpulsdichte: } \vec{\ell}(\vec{r}, t) = \vec{r} \times \vec{p}(\vec{r}, t)$$

Literatur:

- Jackson: Classical Electrodynamics.
- Becker-Sauter: Elektrodynamik Bd. I S95.

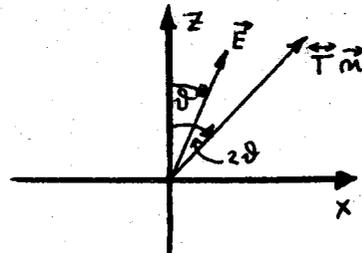
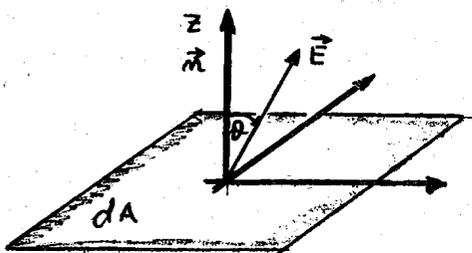
Beispiel 1

Gegeben ist ein elektrostatisches Feld, dessen Feldlinien parallel zur x-z Ebene verlaufen, d.h.

$$\vec{E}(\vec{r}) = (E_x(\vec{r}), 0, E_y(\vec{r})) = |\vec{E}(\vec{r})| \cdot (\sin\vartheta(\vec{r}), 0, \cos\vartheta(\vec{r}))$$



Wie lautet der Maxwell'sche Spannungstensor, und welche Kraft wirkt auf ein zur x-y Ebene paralleles Flächenelement,  $d\vec{A}$ .



$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_0}{2} (E_x^2 - E_z^2) & 0 & \epsilon_0 E_x E_z \\ 0 & -\frac{\epsilon_0}{2} (E_x^2 + E_z^2) & 0 \\ \epsilon_0 E_x E_z & 0 & \frac{\epsilon_0}{2} (E_z^2 - E_x^2) \end{pmatrix} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{r})|^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\vartheta & 0 & \sin 2\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 2\vartheta & 0 & \cos 2\vartheta \end{pmatrix}$$

Kraft auf  $dA$ :  $d\vec{F} = (\vec{T} \cdot \vec{n}) dA = \left( \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \sin 2\vartheta, 0, \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \cos 2\vartheta \right)$

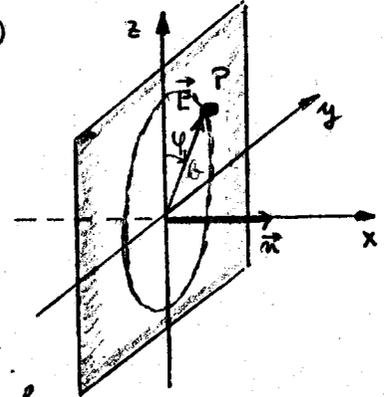
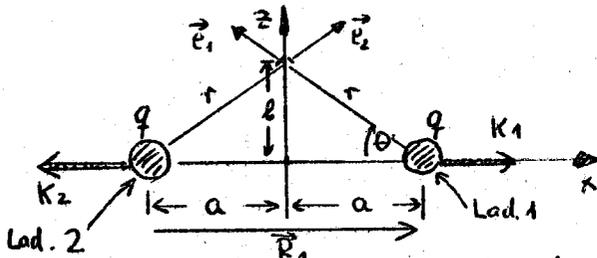
$\vartheta = 0$ , d.h.  $\vec{E} = |\vec{E}| \cdot \vec{e}_z \parallel \vec{n}$  :  $d\vec{F} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \vec{n} dA$  : Zug in Richtung von  $\vec{n}$

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , d.h.  $\vec{E} = |\vec{E}| \cdot \vec{e}_x \perp \vec{n}$  :  $d\vec{F} = -\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \vec{n} dA$  : Druck auf  $dA$  in Richtung  $-\vec{n}$

In beiden Fällen wirkt die Kraft senkrecht auf das Flächenelement.

Beispiel 2

Coulombabstoßung zweier Punktladungen im Bild der Maxwell'schen "Spannungen". (Becker-Sauter, Bd. I, S. 95)



Auf der z-Achse gilt:  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$

mit:  $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = 2 \sin \theta \vec{e}_z$  ;  $\sin \theta = \frac{z}{r}$

$\vec{E}$  liegt immer parallel zum Flächenelement in der y-z Ebene für  $P \in y-z$  Ebene.  
Wir betrachten den Halbraum  $x \leq 0$ , und integrieren  $\vec{T} \cdot \vec{n}$  über die Oberfläche von  $x \leq 0$ . Mit Ausnahme der Fläche  $x=0$  liegen die anderen Teile der Oberfläche vollständig im Unendlichen, wo  $\vec{T}(\vec{r}) = 0$  ist.

Auf der Fläche  $x=0$  ist:  $\vec{T} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(0, y, z)|^2 \vec{e}_x$  (siehe Beispiel 1,  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ )

gesamte Kraft auf  $x=0$ :  $\vec{K}_2 = \iint -\frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(0, y, z)|^2 dy dz \vec{e}_x = -\vec{K}_1$

$$\vec{K}_1 = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \theta}{r^4} dx dy \vec{e}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2} \vec{e}_x \cdot \frac{(2a)^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^3} b db$$

Es wurden Polarkoordinaten  $b, \varphi$  in der y-z Ebene benutzt. Wie erwartet ergibt sich das Coulomb'sche Kraftgesetz. Beachten Sie jedoch die völlig verschiedene Auffassung über das Zustandekommen von  $\vec{K}_1$ .

a) übliche Auffassung: Feld von Ladung 2 übt eine Kraft  $\vec{K}_1$  auf die "Probeladung" 1 aus:  $\vec{K}_1 = q_1 \vec{E}_2(\vec{r}_1)$

b) Kräfte  $\vec{K}_1, \vec{K}_2$  sind eine Folge innerer "Spannungen" des Maxwell-Felds:  $\vec{K} = \oint \vec{T} \cdot \vec{n} dA$ . d.h. eine Eigenschaft des gesamten, von Ladungen 1 und 2 erzeugten Felds.

## 2 Quasistationäre Felder

In den Kapiteln III und IV haben wir untersucht, wie man Felder beschreibt und diese für zeitunabhängige Ladungs- und Stromverteilungen berechnet. Für diesen Spezialfall zerfällt das EMF in zwei unabhängige Teilsysteme: das elektrische und das magnetische Feld, deren Beschreibung weitgehend parallel verläuft.

Als ersten Einstieg in die Dynamik des EMF's betrachten wir zunächst quasistationäre, d.h. zeitlich langsam veränderliche Felder. Hierbei wird der Term  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  in den Maxwellgleichungen (und damit die Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen) vernachlässigt.

$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t),$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$	$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$

In der quasistationären Näherung folgt das Magnetfeld  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  instantan der Stromverteilung, d.h. man ersetzt in den Formeln für  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  des zeitlich konstanten Felds einfach  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  durch den Momentanwert  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ . Für das elektrische Feld ergibt sich jedoch aus den Induktionsgesetz eine weitere Ursache

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B}(\mathbf{r}) d\mathbf{F}$$

$$U_{ind} = -\dot{\phi}(t)$$

Von großer technischer Bedeutung ist die wechselseitige Induktion verschiedener Stromkreise.  $C_1, C_2, \dots, C_N$  seien geschlossen<sup>2</sup> Leiterkreise. Die in ihnen fließenden Ströme erzeugen jeweils Feldbeiträge  $\mathbf{B}_j$  und überlagern sich zu einem Gesamtfeld

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j = \sum_{j=1}^n \operatorname{rot} \mathbf{A}_j$$

Der Fluß in Schleife  $i$  ist

$$\phi_i = \int \int_{C_i} \mathbf{B}(\mathbf{r}) d\mathbf{F} = \sum_{j=1}^N \oint_{C_i} \mathbf{A}_j d\mathbf{r}$$

Dieser kann mit der Integraldarstellung für  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  aus Kap. IV.1 umgeschrieben werden

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N L_{ij} I_j(t),$$

$L_{ij} = L_{ji}$  bezeichnen die Induktionskoeffizienten.

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}$$

Die in der Schleife  $i$  induzierte Spannung

$$U_{ind}^{(i)} = -\sum_{j=1}^N L_{ij} \dot{I}_j(t)$$

setzt sich demnach aus zwei Anteilen zusammen: der eine wird durch Stromänderungen eigenen Leiter ( $i = j$ , Selbstinduktion), der andere durch solche in fremden Leitern ( $i \neq j$ , Wechselinduktion) verursacht.

N.B. Die Formel für  $L_{ij}$  mit  $i = j$  ist in der Praxis leider wenig brauchbar. Eine direkte Berechnung über das  $\mathbf{B}$ -Feld ist besser (z.B. lange Spule).

### Magnetische Feldenergie

Die vom Strom  $I_i(t)$  an der Schleife  $i$  verrichtete Arbeit ist nach  $\int U(t')I(t')dt'$

$$W_i = \int_{-\infty}^t dt' \sum_{j=1}^N L_{ij} \dot{I}_j(t') I_i(t')$$

Insgesamt

$$W_{ges} = \int_{-\infty}^t dt' \sum_{i,j} L_{ij} I_i(t') \dot{I}_j(t')$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit dem magnetischen Anteil der Feldenergie

$$W_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \int \int \int \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) dV = \sum_{ij} \frac{1}{2} L_{ij} I_i(t) I_j(t)$$

Beispiel:

lange Zylinderspule mit  $N$  Wind. pro Länge  $L$  und Radius  $R_I$

Magnetfeld:

Fluß:

Induktionsspannung:

Selbstinduktivität:

Feldenergie:

### §3 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Vakuum

Im Gegensatz zu den meisten bisher behandelten statischen Problemen der Elektrodynamik wollen wir uns jetzt zeitlich und räumlich rasch veränderlichen Feldern zuwenden. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß diese Felder sich im Vakuum ausbreiten, außerdem sollen in den betrachteten Raumbereichen keine Ladungen oder Ströme vorhanden sein. Auf das Problem wie man solche Felder erzeugt, werden wir bei der Behandlung des Hertz' schen Dipols zurückkommen.

Wir gehen von den Maxwell-Gleichungen aus:

$$\begin{array}{ll} 1) \operatorname{div} \vec{E} = 0 & 3) \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ 2) \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & 4) \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{array}$$

Aus diesen Gleichungen können wir eines der Felder  $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$  eliminieren.

Bilde die Rotation von 2)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}$$

verwende 3)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

benutze , (div E = 0)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\Delta \vec{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

Hieraus folgt für  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  die Wellengleichung. Analog gehen wir für  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  vor. Kennt man jedoch bereits  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  so ist das zugehörige  $\vec{B}$ -Feld (genauer dessen zeitliche Ableitung) nach der Maxwell-Gleichung 2) bestimmt.

Wellengleichungen

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

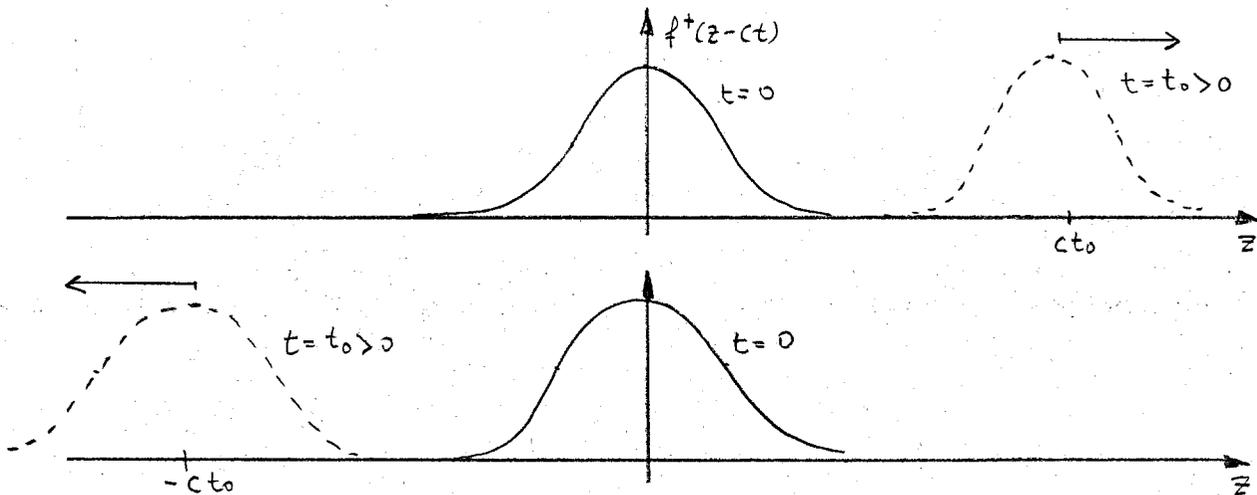
Jede Komponente von  $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$  erfüllt die Wellengleichung. Aber die einzelnen Komponenten der Felder sind nicht unabhängig voneinander, sondern sie sind über die Maxwell-Gleichungen mit einander verknüpft. Darauf haben wir bei der Berechnung der Felder zu achten! Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen ist gleich der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit.

Wir untersuchen die Wellengleichung für den Spezialfall einer Raumdimension näher:

Wellengleichung 
$$\Delta \Psi(z,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \leadsto \quad \underline{\frac{\partial^2 \Psi(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(z,t)}{\partial t^2}}$$

allgemeine Lösung 
$$\Psi(z,t) = f^+(z-ct) + f^-(z+ct)$$

$f^\pm(\xi)$  sind beliebige, zweimal differenzierbare Funktionen.  $f^+(z-ct)$  beschreibt ein Feld, das sich mit konstanter Geschwindigkeit und konstanter Form in Richtung der positiven  $z$ -Achse ausbreitet.  $f^-(z+ct)$  breitet sich dann in negativer  $z$ -Richtung aus.



Die allgemeinste Lösung der Wellengleichung läßt sich demnach durch Überlagerung von  $f^\pm(z \mp ct)$  darstellen. Da die Wellengleichung linear ist, breiten sich die Wellenberge  $f^\pm(z \mp ct)$  völlig ungestört aus und durchdringen sich ohne gegenseitige Beeinflussung.

Ein wichtiger Spezialfall der angegebenen Lösung ist die monochromatische, ebene Welle. An einen festen Ort  $z_0$  oszilliert  $\Psi(r,t)$  mit der festen Frequenz  $\omega$ .

monochromatische, ebene Welle,  
die sich in Richtung der positiven  $z$ -Achse ausbreitet.  
 $k$  = Wellenzahl.

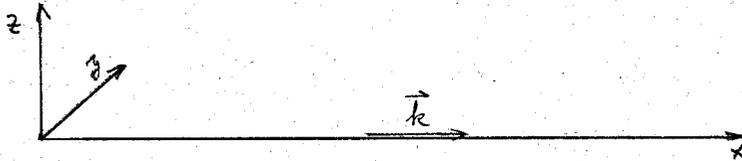
$$\begin{aligned} \Psi(z,t) &= f^+(z-ct) = \cos(kz - \omega t) \\ &= \operatorname{Re} \{ e^{i(kz - \omega t)} \} \\ k &= \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned}$$

Der Ausdruck für eine dreidimensionale ebene Welle mit der Frequenz  $\omega$ , die sich in Richtung des Wellenzahlvektors  $\vec{k}$ ,  $|\vec{k}| = \omega/c$  ausbreitet, lautet:

ebene Welle: 
$$\psi(\vec{r}, t) = \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) = \operatorname{Re}\{e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\}$$

Anstelle von  $\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$  können wir natürlich auch  $\sin(\dots)$  oder eine Überlagerung von beiden Funktionen nehmen.  $\operatorname{Re}\dots$  ist dann durch  $\operatorname{Im}\dots$  zu ersetzen. Aus Bequemlichkeit werden wir meist die komplexe Schreibweise vorziehen und erst am Ende einer Rechnung den Realteil oder Imaginärteil nehmen. Dies darf man allerdings nur so lange tun, wie ausschließlich lineare Operationen auf  $\psi(\vec{r}, t)$  angewendet werden!!

Wie lauten nun  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  einer ebenen elektromagnetischen Welle? Die Welle braucht nicht notwendigerweise monochromatisch zu sein, soll sich jedoch in Richtung der positiven x-Achse ausbreiten.



alle Komponenten von  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  hängen nur von der Kombination  $x-ct$  ab.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x-ct)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x-ct)$$

Dieser Ansatz erfüllt automatisch die Wellengleichungen für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , aber noch nicht die Maxwell-Gleichungen.

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 : \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \equiv \frac{\partial E_x(x-ct)}{\partial x} = 0 \quad \leadsto \quad E_x(\vec{r}, t) = E_x^0 = \text{const}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 : \quad \quad \quad B_x(\vec{r}, t) = B_x^0 = \text{const}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} : \quad \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \quad \leadsto \quad \begin{array}{l} 0 = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} : \quad \begin{array}{l} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \leadsto \quad 0 = 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \leadsto \quad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad \leadsto \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{array}$$

x - Komponenten (=longitudinale  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  - Komponenten)  $E_x(\vec{r}, t) = E_x^0 = 0$   
 beschreiben statische Felder, an denen wir hier  $B_x(\vec{r}, t) = B_x^0 = 0$   
 nicht interessiert sind. Wir setzen daher  $E_x^0 = B_x^0 = 0$ .

y - Komponenten (=transversale  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  - Komponenten)

$$\begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \leadsto \quad E_z'(\xi) = -c B_y'(\xi) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \leadsto \quad E_y'(\xi) = c B_z'(\xi) \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \leadsto \quad B_z'(\xi) = \frac{1}{c} E_y'(\xi) \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad \leadsto \quad B_y'(\xi) = -\frac{1}{c} E_z'(\xi) \end{array} \quad \xi = x - ct$$

Hieraus folgen, abgesehen von räumlich und zeitlich konstanten Anteilen in  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  die Beziehungen :

$$B_y(x-ct) = -\frac{1}{c} E_z(x-ct) \quad B_z(x-ct) = \frac{1}{c} E_y(x-ct)$$

$E_z(x-ct)$  und  $E_y(x-ct)$  sind beliebige Funktionen ihrer Argumente. Der Einfachheit halber wollen wir eine Welle betrachten, deren  $\vec{E}$  - Feld parallel zu der y-Achse ist,  $E_z=0$ . Damit wird auch  $B_y=0$ .

Elektromagnetische Welle,  
 die sich in positiver x-  
 Richtung ausbreitet und  
 für die  $\vec{E} \parallel y$  - Achse ist

$$\begin{array}{l} E_x = E_z = 0 \\ E_y(\vec{r}, t) = f(x-ct) \\ B_x = B_y = 0 \\ B_z(\vec{r}, t) = f(x-ct) \end{array}$$

Elektromagnetische Wellen sind daher Transversalwellen.

Ebene, monochromatische Welle,  
die sich in positiver  $x$  - Rich-  
tung ausbreitet.  $\omega = c \cdot k$

$$\begin{aligned} E_x = E_z = B_x = B_y &= 0 \\ E_y(\vec{r}, t) &= E_0 \cos(kx - \omega t) = \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{i(kx - \omega t)} \right\} \\ B_z(\vec{r}, t) &= \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Wir berechnen Energie, Energiestromdichte und Impulsdichte der ebenen Welle:

Energiedichte:  $w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$

zeitlicher Mittelwert:  $\overline{w(\vec{r}, t)} = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} w(\vec{r}, t) dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$

d. h. elektrische und magnetische Energiedichte sind gleich groß

Energiestromdichte:  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{E_0^2}{c \mu_0} \cos^2(kx - \omega t) \vec{e}_x = c \cdot \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \vec{e}_x$

zeitlicher Mittelwert:  $\overline{\vec{S}} = c \cdot \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \right) \vec{e}_x$

Die Energiestromdichte  $\vec{S}$  ist - wie erwartet - gleich der Energiedichte  $w(\vec{r}, t)$  multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit. Für ebene Wellen die sich im Vakuum ausbreiten ist  $c$  also gleich der Transportgeschwindigkeit der Energie. Im Hohlleiter ist dies beispielsweise nicht so!

Impulsdichte:  $\vec{p}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{c} w(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_x$

Eine ebene Welle transportiert daher Energie und Impuls stets in einem ganz bestimmten Zusammenhang,

$$\text{Energie} = \text{Lichtgeschwindigkeit} \times |\text{Impuls}|$$

wie man es aus der Einstein'schen Mechanik für ein extrem relativistisches Teilchen erwartet, d. h.  $v \rightarrow c$  oder  $m_0 c^2 \gg cp$

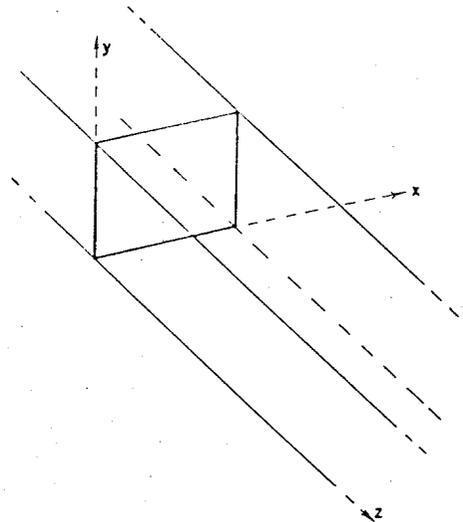
relativistisches Teilchen  $E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (cp)^2} \rightarrow cp$

#### Literatur:

Falk - Ruppel, Mechanik, Relativität, Gravitation, §5 und §6  
Feynman lectures, Vol II, Kap. 20

§4 Wellen in Hohlleitern

Wir untersuchen nun die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in sog. Hohlleitern (Wellenleitern). In einfachen Fällen sind Hohlleiter zylindrische hohle Gebilde mit konstantem, rechteckigem Querschnitt und bestehen aus Metall. Da wir an den Ohm'schen Verlusten von Wellen nicht interessiert sind, wollen wir annehmen, daß die elektrische Leitfähigkeit der Metallwände beliebig gut ist.



Daß in einem solchen Hohlleiter die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen möglich ist, ist unmittelbar einsichtig: man sieht durch, und Licht ist eine elektromagnetische Welle. Gegenüber der freien Ausbreitung von Wellen ergeben sich jedoch zwei wichtige Unterschiede:

- i) Es gibt eine untere Grenzfrequenz, unterhalb der eine (ungedämpfte) Ausbreitung elektromagnetischer Wellen nicht möglich ist.
- ii) Die Transportgeschwindigkeit der Energie (=Signalgeschwindigkeit) ist von der Vakuumlichtgeschwindigkeit verschieden:  $v \neq c$ . Außerdem hängt  $v$  von der Frequenz  $\omega$  der Welle ab (Dispersion).

Wegen der großen Bedeutung von Hohlleitern in der Nachrichtentechnik, wollen wir dieses Verhalten eingehend am Beispiel des rechteckigen Hohlleiters studieren.

$\vec{E}_0$  und  $\vec{B}_0$  sind Lösungen der Wellengleichung mit den Randbedingungen  $E_t = B_n = 0$  auf den Metallflächen. Jede Komponente von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  ist von der Form:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(x, y) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \equiv \operatorname{Re} \left\{ \psi(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \right\}$$

(gemeint ist natürlich stets der Real- oder Imaginärteil von  $\psi(r, t)$ ).

Einsetzen in 
$$\Delta \psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

führt auf:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \cdot \psi(x, y) = 0$$

Wir versuchen durch einen Separationsansatz, Lösungen dieser Gleichung zu finden, mit dem wir die geforderten Randbedingungen erfüllen können.

Separationsansatz:  $\Psi(x, y) = f(x) \cdot g(y)$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) = 0$$

Da  $x$  und  $y$  unabhängige Variablen sind, ist diese Gleichung nur dann richtig, wenn  $\theta$  und  $\alpha$  Konstanten sind.

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\alpha^2 \quad \leadsto \quad f''(x) + \alpha^2 f(x) = 0 \quad \leadsto \quad f(x) = \alpha_1 \sin \alpha x + \alpha_2 \cos \alpha x$$

$$\frac{g''(y)}{g(y)} = -\theta^2 \quad \leadsto \quad g''(y) + \theta^2 g(y) = 0 \quad \leadsto \quad g(y) = \alpha_3 \sin \theta y + \alpha_4 \cos \theta y$$

Die (noch unbekannte) Wellenzahl  $k$  hängt mit der (gegebenen) Frequenz  $\omega$  und den Separationskonstanten  $\alpha$  und  $\theta$  durch

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 - \theta^2$$

zusammen.  $\alpha$  und  $\theta$  erweisen sich als reell und positiv, sodaß  $-\alpha^2$  und  $-\theta^2$  negativ sind.

Für die einzelnen Komponenten von  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  erhalten wir demnach:

$$E_x(\vec{r}, t) = (\alpha_1 \sin \alpha x + \alpha_2 \cos \alpha x) \cdot (\alpha_3 \sin \theta y + \alpha_4 \cos \theta y) \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

$$E_y(\vec{r}, t) = (\beta_1 \sin \alpha x + \beta_2 \cos \alpha x) \cdot (\beta_3 \sin \theta y + \beta_4 \cos \theta y) \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

$$E_z(\vec{r}, t) = (\gamma_1 \sin \alpha x + \gamma_2 \cos \alpha x) \cdot (\gamma_3 \sin \theta y + \gamma_4 \cos \theta y) \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

Die möglichen Werte der Separationskonstanten  $\alpha$  und  $\theta$  und der Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  bestimmen wir mit Hilfe der Randbedingungen:

$$\begin{array}{l} \underline{x=0} \\ (y = \text{bel.}) \end{array} \quad \begin{array}{l} E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{array} \quad \leadsto \quad \begin{array}{l} \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{x=a} \\ (y = \text{bel.}) \end{array} \quad \begin{array}{l} E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{array} \quad \leadsto \quad \begin{array}{l} \sin \alpha \cdot a = 0 \\ \text{dasselbe} \end{array} \quad \leadsto \quad \alpha = \alpha_n = n \cdot \pi \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{array}{l} \underline{y=0} \\ (x = \text{bel.}) \end{array} \quad \begin{array}{l} E_x = 0 \\ E_z = 0 \end{array} \quad \leadsto \quad \begin{array}{l} \alpha_4 = 0 \\ \gamma_4 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{y=b} \\ (x = \text{bel.}) \end{array} \quad \begin{array}{l} E_x = 0 \\ E_z = 0 \end{array} \quad \leadsto \quad \begin{array}{l} \sin \theta \cdot b = 0 \\ \text{dasselbe} \end{array} \quad \leadsto \quad \theta = \theta_m = m \cdot \pi \quad ; \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Für das Magnetfeld können wir entsprechende Gleichungen ansetzen. Leichter ist es jedoch  $\vec{B}$  aus der Maxwell-Gleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ , bei bekanntem  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  zu bestimmen. Die angegebenen Komponenten von  $E(r, t)$  erfüllen noch nicht die Maxwell-Gleichungen:

$$\text{div} \vec{E} = 0: \quad \alpha_1 (\alpha_1 \cos \alpha x - \alpha_2 \sin \alpha x) \alpha_3 \sin \theta y + \beta_1 \sin \alpha x \cdot \theta (\beta_3 \cos \theta y - \beta_4 \sin \theta y) + (\gamma_1 \sin \alpha x) \cdot (\gamma_3 \sin \theta y) i k = 0$$

$$\text{hieraus folgt: } \alpha_1 = 0; \quad \beta_3 = 0; \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \theta \beta_1 \beta_4 - \gamma_1 \gamma_3 i k = 0$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{legen } \vec{B}(\vec{r}, t) \text{ fest.}$$

Ergebnis:

$$E_x(\vec{r}, t) = \alpha \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{i(kz - \omega t)}; \quad B_x(\vec{r}, t) = \frac{\alpha'}{c} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$E_y(\vec{r}, t) = \beta \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} e^{i(kz - \omega t)}; \quad B_y(\vec{r}, t) = \frac{\beta'}{c} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$E_z(\vec{r}, t) = \gamma \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{i(kz - \omega t)}; \quad B_z(\vec{r}, t) = \frac{\gamma'}{c} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\text{Frequenz - Wellenzahl Relation: } \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

Die Hohlleiterwelle wird durch die Frequenz  $\omega$  und durch die Angabe der ganzen Zahlen  $m = 0, 1, 2, \dots$  und  $n = 0, 1, 2, \dots$  und der zwei Konstanten  $\delta$  und  $\delta'$  festgelegt.  $\delta$  und  $\delta'$  legen ihrerseits die Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  fest:

$$\alpha = \frac{n\pi}{a} \cdot k \cdot \delta - \frac{m\pi}{b} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \delta'$$

$$\alpha' = -\frac{m\pi}{b} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \delta - \frac{n\pi}{a} \cdot k \cdot \delta'$$

$$\beta = \frac{m\pi}{b} \cdot k \cdot \delta + \frac{n\pi}{a} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \delta'$$

$$\beta' = \frac{n\pi}{a} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \delta - \frac{m\pi}{b} \cdot k \cdot \delta'$$

$$\gamma = i \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \cdot \delta$$

$$\gamma' = i \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \cdot \delta'$$

Spezialfälle unserer Lösung sind:

TE - Welle: (=transversal elektrische Welle)

$$\delta = 0; \quad \delta' \neq 0 \quad \leadsto \quad E_z = 0; \quad B_z \neq 0$$

d.h. das  $\vec{E}$ -Feld der Hohlleiterwelle ist rein transversal.  $\vec{B}$  hat jedoch eine Komponente in Fortpflanzungsrichtung.

TM - Welle: (=transversal magnetische Welle)

$$\delta \neq 0; \quad \delta' = 0 \quad \leadsto \quad E_z \neq 0; \quad B_z = 0$$

Für einen bestimmten Typ von Hohlleiterwellen gibt es daher eine untere Grenzfrequenz  $\omega_g$ , unterhalb der keine (ungedämpfte) Ausbreitung von Wellen im Hohlleiter möglich ist. Da  $k^2 \geq 0$  ist, gilt:

$$\omega \geq \omega_g = c \cdot \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

Für einen rechteckigen Hohlleiter mit  $a \geq b$  hat die TE - Welle mit  $n=1, m=0$  die kleinste Grenzfrequenz.

TE - Welle mit  $n=1, m=0$ :

Grenzfrequenz:  $\omega_g = c \cdot \frac{\pi}{a}$

$$k = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Felder:  $E_x = 0$

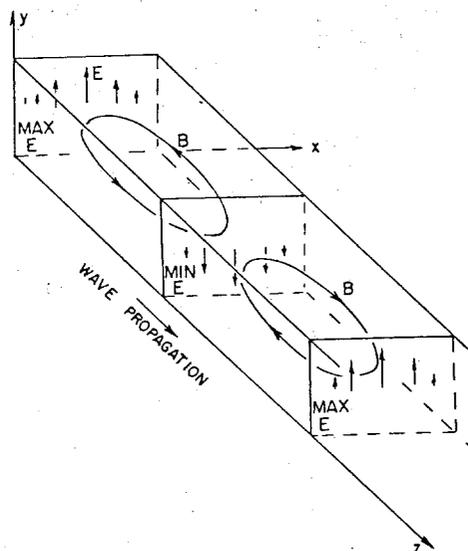
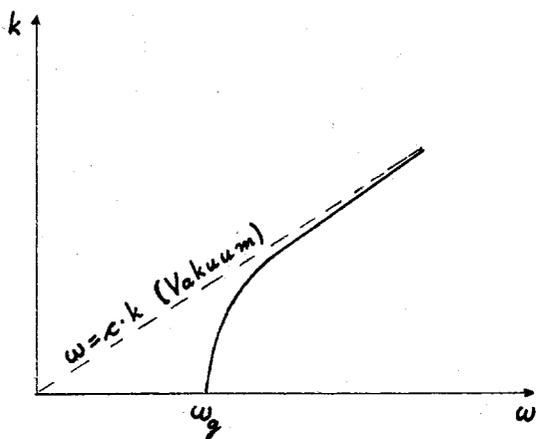
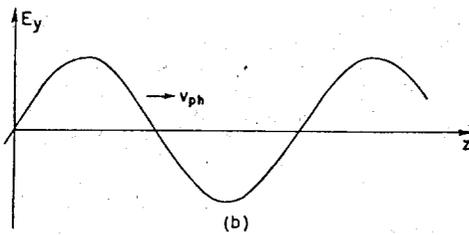
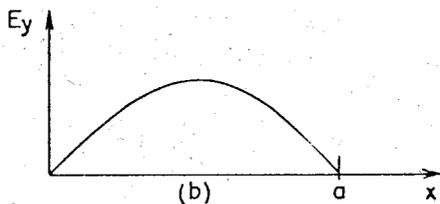
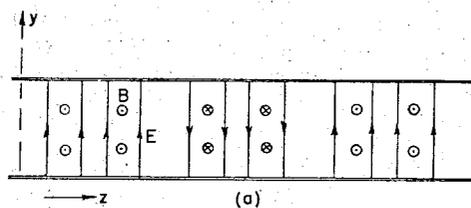
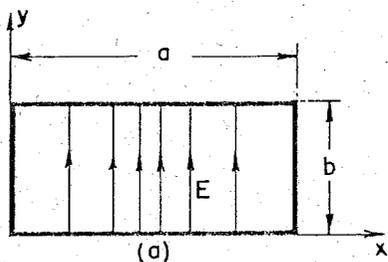
$$B_x = -\frac{\omega}{c} k \delta' \sin \frac{\pi x}{a} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$E_y = \frac{\omega \cdot \omega}{c^2} \delta' \sin \frac{\pi x}{a} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$B_y = 0$$

$$E_z = 0$$

$$B_z = i \frac{\omega^2}{c^3} \delta' \cos \frac{\pi x}{a} e^{i(kz - \omega t)}$$



Für  $\omega < \omega_g$  wird  $k^2 < 0$ , d.h.  $k$  ist rein imaginär: die Amplitude der Hohlleiterwelle klingt in positiver  $z$ -Richtung exponentiell ab, und zwar umso stärker, je weiter  $\omega$  unterhalb der Grenzfrequenz  $\omega_g$  ist.

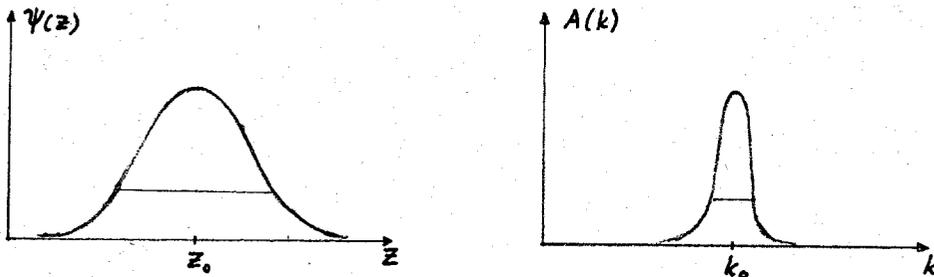
Wir untersuchen nun die Geschwindigkeit, mit der sich eine Wellengruppe (=Signal) im Hohlleiter fortpflanzt. Eine Wellengruppe kann man sich aus vielen monochromatischen Wellen aufgebaut denken.

$$\text{Wellengruppe: } \psi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kz - \omega(k)t)} dk$$

$$\text{Zur Zeit } t=0: \psi(z, 0) = \psi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikz} dk$$

$$\text{Fourier-Rücktransformation: } A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z, 0) e^{-ikz} dz$$

Ist z. B.  $\psi(z, 0)$  eine bei  $z_0$  zentrierte Gaussfunktion, so ist  $A(k)$  ebenfalls eine Gaussfunktion. Ihre Halbwertsbreiten verhalten sich jedoch zueinander reziprok.

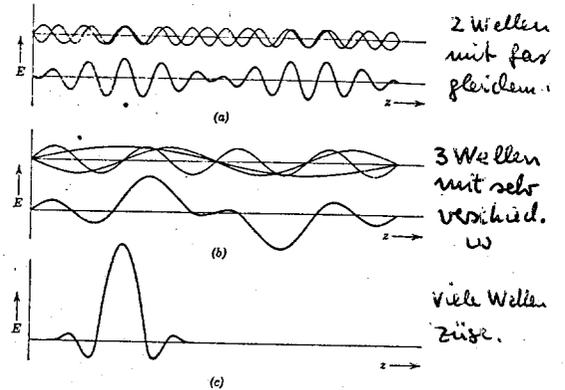


Da zum Fourierintegral hauptsächlich  $k$ -Werte in der Gegend von  $k_0$  beitragen, entwickeln wir  $\omega = \omega(k)$  in eine Taylorreihe um  $k = k_0$  und brechen nach dem linearen Glied ab.

$$\text{Taylorentwicklung: } \omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k_0} \cdot (k - k_0) + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Wellengruppe: } \psi(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ik(z - \omega'(k_0)t)} \cdot e^{i[\omega'(k_0)k_0 - \omega_0]t} dk \\ \psi(z, t) &= \psi(z - \omega'(k_0)t) \cdot e^{i[\omega'(k_0) \cdot k_0 - \omega_0]t} \end{aligned}$$

Die "Trägerwelle"  $\exp(i[\omega'(k_0)k - \omega_0]t)$  wird durch den Amplitudenfaktor  $\psi(z - \omega'(k_0)t)$  moduliert. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellengruppe bewegt, ist die sog. Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  :



Gruppengeschwindigkeit:  $v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}$

Phasengeschwindigkeit:  $v_p = \frac{\omega(k)}{k}$

Die Gruppengeschwindigkeit ist die Transportgeschwindigkeit der Energie, sie ist im allgemeinen verschieden von der Phasengeschwindigkeit der Welle.

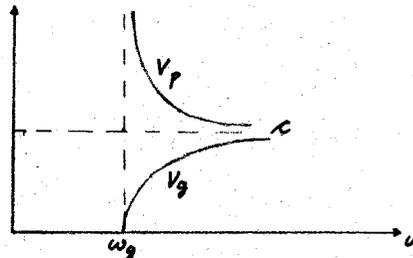
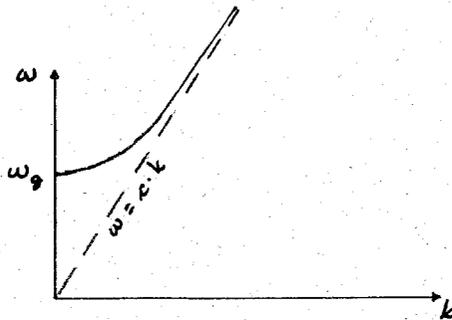
Für die TE- Hohlleiterwelle mit  $n=1$ ,  $m=0$  ist speziell:

$\omega - k$  Relation:  $\omega(k) = c \cdot \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$

Phasengeschwindigkeit:  $v_p = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}$

Gruppengeschwindigkeit:  $v_g = c \cdot \left(\frac{c}{\omega}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$

$$v_p \cdot v_g = c^2$$



Bemerkenswerterweise ist  $\omega(k)$  identisch mit dem Energie - Impuls Zusammenhang eines (relativistischen) Teilchens, wenn man  $\omega$  (bzw. die zu  $\omega$  proportionale Größe  $\hbar\omega$ ) mit der Energie und  $k$  (bzw.  $\hbar k$ ) mit dem Impuls und  $\frac{\hbar}{a} \frac{1}{c}$  (bzw.  $\frac{\hbar}{a c}$ ) mit der Ruhmasse des Teilchens identifiziert.

$$E(p) = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (c p)^2}$$

Die bei der Entwicklung von  $\omega = \omega(k)$  vernachlässigten Terme von zweiter und höherer Ordnung führen dazu, daß sich die Form des Wellenpakets im Laufe der Zeit ändert: es fließt auseinander! Diese Erscheinung bezeichnet man als Dispersion, die immer dann auftritt, wenn  $\omega = \omega(k)$  keine lineare Funktion von  $k$  ist.

#### Literatur:

Feynman lectures, Vol II, Kap 24

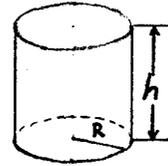
Falk - Ruppel, Mechanik, Relativität, Gravitation, Kap. II

Cheston, Elementary Theory of Electric and Magnetic Fields, Kap 11

§5 Resonatoren

Im Gegensatz zu den Hohlleitern bestehen Resonatoren aus vollständig von Metallflächen umschlossenen Raumbereichen. Das elektromagnetische Feld bildet in den Resonatoren stehende Wellen, wobei nur noch ganz bestimmte Frequenzen (Eigenfrequenzen) möglich sind. Resonatoren werden meist in Form von Quadern oder Zylindern gebaut.

Wir untersuchen speziell einen zylinderförmigen Resonator mit parallelen Grund- und Deckelflächen. Die Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind Lösungen der Wellengleichung und haben die mathematische Form



$$\Psi(\rho, \varphi, z, t) = F(\rho) \cdot e^{im\varphi} \cdot e^{ikz} \cdot e^{-i\omega t} = \Psi(\rho, \varphi, z) e^{-i\omega t}$$

Wellengleichung: 
$$\Delta \Psi = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(\rho, \varphi, z, t)}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \Delta \Psi(\rho, \varphi, z) + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi(\rho, \varphi, z) = 0$$

In Zylinderkoordinaten ist

$$\Delta \Psi(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

Gleichung für  $F(\rho)$

$$: \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) F(\rho) = 0$$

$$F''(\rho) + \frac{1}{\rho} F'(\rho) + \frac{\rho^2 \alpha^2 - m^2}{\rho^2} F(\rho) = 0$$

Abkürzung:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

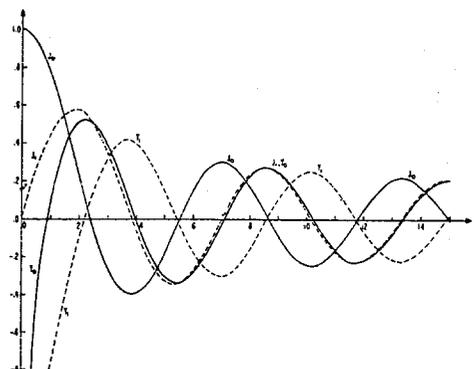
Die Gleichung für  $F(\rho)$  ist mit der Bessel'schen Differentialgleichung eng verwandt.

$$F(\rho) = a \cdot J_m(\alpha \rho) + b \cdot Y_m(\alpha \rho)$$

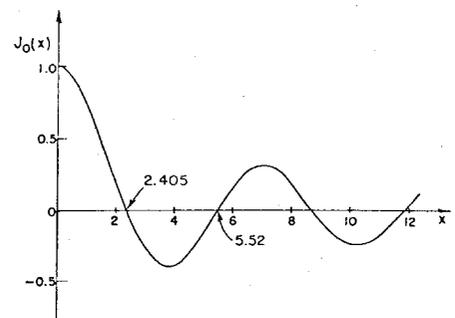
Bessel'sche Differentialgl. 
$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \frac{x^2 - m^2}{x^2} y(x) = 0$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = a \cdot J_m(x) + b \cdot Y_m(x) \quad (m = \text{ganze Zahl})$$



$J_0(x), Y_0(x), J_1(x), Y_1(x)$ .



The Bessel function  $J_0(x)$ .

Reihenentwicklungen:  $J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}}{k! (m+k)!} = \frac{x^m}{2^m m!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2m+2)} + \dots\right)$  ( $m \geq 0$ )

$x \rightarrow 0$   $Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2}$

$x \rightarrow 0$   $Y_m(x) \sim -\frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}$  ( $m \geq 1$ )

$x \rightarrow \infty$   $J_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots$

Rekursionsformeln :  $J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x)$

Ableitung :  $\frac{dJ_m(x)}{dx} = -\frac{m}{x} J_m(x) + J_{m-1}(x)$

}  $J_{-m}(x) \equiv (-1)^m J_m(x)$

Bessel- und Neumannfunktion,  $J_m(x)$  bzw.  $Y_m(x)$ , haben abzählbar unendlich viele Nullstellen, die jedoch - im Gegensatz zu denen von  $\sin x$  und  $\cos x$  - <sup>nicht</sup> äquidistant liegen und auch in keinem rationalen Verhältnis zueinander stehen, z.B.

$$J_0(x_0) = 0 \quad \leadsto \quad x_0^{(1)} = 2,4048 \quad x_0^{(2)} = 5,52 \quad x_0^{(3)} = 8,68$$

$$J_1(x_1) = 0 \quad \leadsto \quad x_1^{(1)} = 3,83 \quad x_1^{(2)} = 7,01 \quad x_1^{(3)} = 10,2$$

Da aus physikalischen Gründen keine der Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  bei  $\rho = 0$  unendlich werden darf, tritt  $Y_m(x\rho)$  in  $F(\rho)$  nicht auf; d.h.  $b = 0$ . Für jeden Wert von  $m$  kann die Konstante  $\alpha$  einen anderen Wert haben,  $\alpha = \alpha_m$ .

Da es uns in diesem Paragraphen mehr um das Prinzip von Schwingungen in Resonatoren geht, als um die Erfassung aller möglichen Schwingungstypen, wollen wir uns auf einen Schwingungstyp (= Mode) beschränken, bei dem das  $\vec{E}$ -Feld parallel zur Zylinderachse ist.

$$E_\rho = 0$$

$$E_\varphi = 0$$

$$E_z = \gamma J_m(\alpha_m \rho) e^{im\varphi} e^{ikz} e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B} \text{ aus } \dot{\vec{B}} = -\text{rot}\vec{E}(\vec{r}, t)$$

Randbedingungen:  $E_t = 0$  auf der Metall-Oberfläche:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Boden, } z = 0 \\ \text{Deckel, } z = h \end{array} \right\} E_\varphi = E_\rho = 0, \text{ automatisch erfüllt}$$

Mantelfläche:  $\rho = R$ :  $E_\varphi = 0 \leadsto$  automatisch erfüllt

$$E_z = 0 \leadsto J_m(x_m R) = 0 \leadsto x_m = x_m^{(n)} = \frac{x_m^{(n)}}{R}$$

$x_m^{(n)}$  bezeichnet die n-te Nullstelle von  $J_m(x)$

### Maxwellgleichungen:

$$\underline{\text{div } \vec{E} = 0} : \frac{\partial E_z(\rho, \varphi, z)}{\partial z} = ik E_z = 0 \leadsto k = 0$$

( $E_z$  ist unabhängig von  $z$ )

$$\underline{\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} : \text{Hieraus bestimmen wir } \dot{\vec{B}} \text{ bzw. } \vec{B}.$$

$$\dot{B}_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \leadsto B_\varphi = \frac{m}{\omega} \gamma J_m(x_m^{(n)} \rho) e^{im\varphi} e^{-i\omega t}$$

$$\dot{B}_\rho = \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \leadsto B_\rho = \gamma J_m'(x_m^{(n)} \rho) x_m^{(n)} e^{im\varphi} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}$$

$$\dot{B}_z = 0 \leadsto B_z = 0$$

$$\underline{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \text{ und } \underline{\text{div } \vec{B} = 0} \text{ sind dann auch erfüllt.}$$

### Ergebnis:

Schwingungsmode mit  $\vec{E} \parallel z$ -Achse wird festgelegt durch  $m (= 0, 1, 2, \dots)$ ,  $n (= 1, 2, \dots)$

$$\text{Felder: } E_\rho = 0$$

$$E_\varphi = 0$$

$$E_z = \gamma \cdot J_m(x_m^{(n)} \rho) e^{im\varphi} e^{-i\omega t}$$

$$B_\rho = \gamma \frac{m}{\omega} J_m'(x_m^{(n)} \rho) e^{im\varphi} e^{-i\omega t}$$

$$B_\varphi = -\gamma \frac{x_m^{(n)}}{i\omega} \left[ J_{m-1}(x_m^{(n)} \rho) - \frac{m}{x_m^{(n)} \rho} J_m(x_m^{(n)} \rho) \right] e^{im\varphi} e^{-i\omega t}$$

$$B_z = 0$$

$$\text{Eigenfrequenz: } \omega \equiv \omega_{m,n} = c \cdot \frac{x_m^{(n)}}{R} \quad (\text{unabhängig von } h)$$

Wir untersuchen speziell den Mode  $m = 0$ ,  $n = 1$ . Für einen flachen Resonator,  $h < R$ , hat dieser Mode die kleinste Eigenfrequenz. Für kompliziertere Feldkonfigurationen hat  $\vec{E}$  Komponenten in  $\rho$  und  $\varphi$ -Richtung, die außerdem von der  $z$ -Koordinate abhängen. Wegen der Randbedingung,  $E_t = 0$ , auf der Oberfläche kann  $k$  jedoch nur die diskreten Werte  $k \equiv k_l = \frac{l\pi}{h}$  annehmen,  $l = 0, 1, 2, \dots$ .

Die Resonanzfrequenz eines solchen Modes wird dann durch 3 Zahlen  $m, n, l$  festgelegt. Die Eigenfrequenz beträgt

$$\omega_{mnl} = c \cdot \sqrt{\left(\frac{l\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{x_m^{(n)}}{R}\right)^2}$$

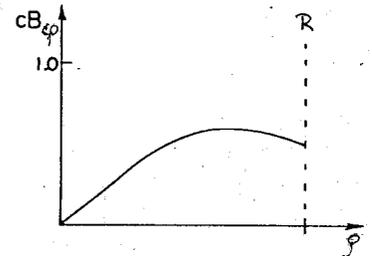
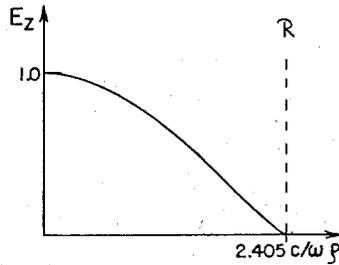
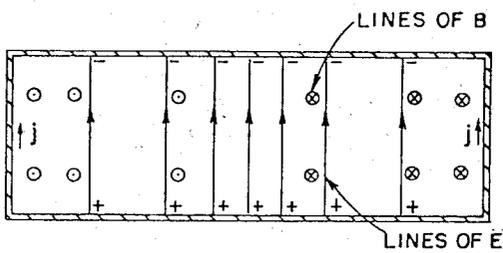
Für  $h > R$  hat der Mode mit  $m=1, n=1, l=1$  die kleinste Eigenfrequenz, deren Wert explizit von der Resonatorhöhe  $h$  abhängt.

Mode  $m=0, n=1, l=0$

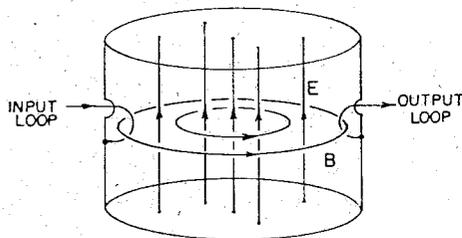
$$E_\rho = 0 \quad E_\varphi = 0 \quad E_z(\rho, \varphi, z, t) = \gamma \cdot J_0(\chi_0^1 \rho) e^{-i\omega t}$$

$$B_\rho = 0 \quad B_z = 0 \quad B_\varphi(\rho, \varphi, z, t) = -i\gamma \frac{\chi_0^1}{\omega} J_1(\chi_0^1 \rho) e^{-i\omega t}$$

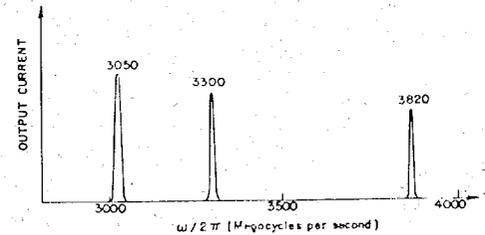
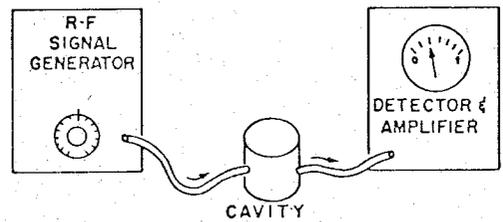
$$\chi_0^1 = \frac{2.405}{R}, \quad \omega = \frac{2.405c}{R}$$



Mögliche An- und Auskopplung eines Resonators

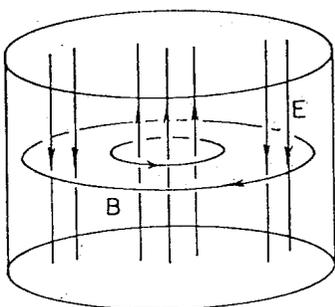


Coupling into and out of a resonant cavity.

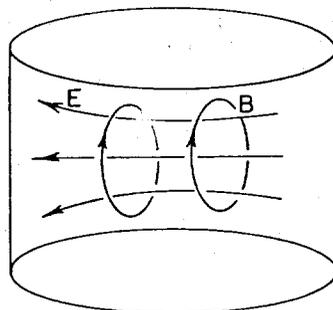


Observed resonant frequencies of a cylindrical cavity.

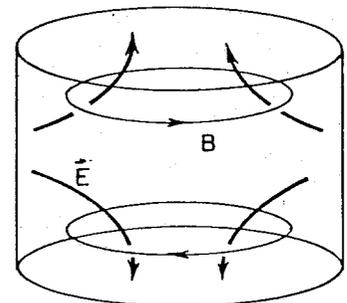
Einige Beispiele für kompliziertere Schwingungstypen eines Resonators



$m=1, n=1, l=0$



A transverse mode of the cylindrical cavity.



Another mode of a cylindrical cavity.

### §6 Skalar- und Vektorpotential bewegter Ladungen

In diesem Paragraphen wollen wir Erscheinungen behandeln, die in Verbindung mit schnell bewegten Ladungen im Vakuum auftreten. Unser Ziel ist es, entsprechend dem statischen Fall, die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  aus den Potentialen  $\phi$  und  $\vec{A}$  zu berechnen.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \\
 2) \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 3) \quad \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
 4) \quad \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \quad \text{hieraus folgt } \underline{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)}
 \end{aligned}$$

mit  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  folgt  $\underline{E + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \phi(\vec{r}, t)}$

Aus 1) und 3) erhalten wir Gleichungen für die Potentiale  $\phi$  und  $\vec{A}$

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \\
 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \phi \right)
 \end{aligned}$$

Mit der üblichen Umformung  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = -\Delta \vec{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}$  führt dies zunächst auf zwei gekoppelte Differentialgleichungen für  $\phi$  und  $\vec{A}$ .

$$\begin{aligned}
 \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \\
 \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)
 \end{aligned}$$

Durch eine spezielle Eichung der Potentiale (welche die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  unverändert lässt) kann man die beiden Gleichungen entkoppeln, und damit eine wesentliche Vereinfachung erzielen. Von allen möglichen Eichtransformationen leistet dies gerade die sog. Lorentzeichung.

beliebige  
Eichtransformation

$$\begin{aligned}
 \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda(\vec{r}, t) \\
 \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$\Lambda(\vec{r}, t)$ :  
Eichfunkt.

Lorentzeichung

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} &= 0 \\
 \Delta \Lambda(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned}$$

Gleichungen für  
die Potentiale  $\phi, \vec{A}$   
in Lorentzeichung.

$$\begin{aligned}
 \Delta \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \\
 \Delta \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)
 \end{aligned}$$

Eine andere spezielle Eichung der Felder  $\phi, \vec{A}$  ist die sog. Coulombeichung, in welcher  $\phi(\vec{r}, t)$  dieselbe (Poisson) Gleichung erfüllt, wie in der Elektrostatik. [Im Gegensatz zur Lorentzeichung ist die Coulombeichung jedoch nicht invariant gegenüber dem Wechsel des Bezugssystems von einem Inertialsystem in ein anderes.]

Wir nehmen zur Kenntniss, daß man die Zustände des elektromagnetischen Felds, außer durch  $\vec{E}, \vec{B}$ , auch durch die Potentiale  $\phi, \vec{A}$  plus deren erste Zeitableitungen  $\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  festlegen kann. (DGl. 2.ter Ordng in t). Hierbei ist es nötig eine bestimmte Eichung (Lorentz, Coulomb) zu wählen und innerhalb diese Eichung die Eichfunktion  $\Lambda(\vec{r}, t)$  festzulegen.

	Felder $\vec{E}, \vec{B}$	Potentiale $\phi, \vec{A}$	
		Lorentzeichung	Coulombeichung
Zustände (zur Zeit $t_0$ )	$\vec{E}(\vec{r}, t_0), \vec{B}(\vec{r}, t_0)$	$\phi(\vec{r}, t_0), \vec{A}(\vec{r}, t_0)$ plus	$\frac{\partial \phi(\vec{r}, t_0)}{\partial t_0}; \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t_0)}{\partial t_0}$
Observable	$\mathcal{O} = \mathcal{O}(\vec{E}, \vec{B})$	$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi$	
Eichtransformation	—	$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}$	$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \text{grad } \Lambda(\vec{r}, t)$
spezielle Eichungen	—	$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ $\Delta \Lambda(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$	$\text{div } \vec{A} = 0$ $\Delta \Lambda(\vec{r}, t) = 0$
Dynamik	$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \text{rot } \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{j}$ $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E}$ $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ $\text{div } \vec{B} = 0$	$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}$ $\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$	$\Delta \phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$ $\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}^T(\vec{r}, t)$ $\vec{j}^T(\vec{r}, t) := \vec{j} - \epsilon_0 \text{grad } \frac{\partial \phi}{\partial t}$ (transversale Komp. von $\vec{j}$ )
Vorteile	direkter Zusammenhang mit der Kraft $\vec{F}$	Symmetrie in $\vec{A}, \phi$	Man kann $\phi(\vec{r}, t) \equiv 0$ außerhalb von Ladungsverteilungen wählen!

Wir berechnen nun die Potentiale  $\phi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  in Lorentzzeichnung:

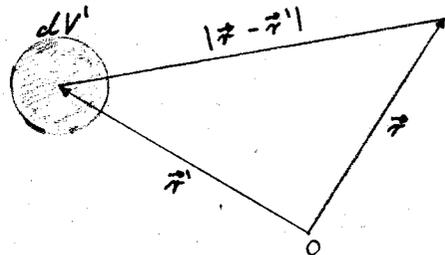
Die Lösung der inhomogenen Wellengleichungen wird durch die sog. retardierten Potentiale gegeben.

retardierte Potentiale

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Zu  $\phi$  und  $\vec{A}$  können noch Lösungen der freien (homogenen) Wellengleichung (d. h.  $\rho \equiv \vec{j} \equiv 0$ ) hinzugefügt werden.  $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$  bezeichnet den zur Zeit  $t$  "retardierten" Zeitpunkt: Zu  $\phi(\vec{r}, t)$  können nur Ladungen in Volumenelementen bei  $\vec{r}'$  beitragen, deren Felder zu der früheren Zeit  $t'$  von dort aus "gestartet" sind.



Nachweis, daß die angegebenen Potentiale Lösungen der zeitabhängigen Potentialgleichungen sind:

$$\Delta \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \Delta_{\vec{r}} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \Delta_{\vec{R}} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{|R|} dV'$$

$$\text{setze: } \vec{r} - \vec{r}' = \vec{R}$$

$$t - \frac{R}{c} = t'$$

$$\Delta_{\vec{R}} \left( \frac{F(R)}{R} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} F(R) - 4\pi F(0) \cdot \delta(\vec{R}) \quad (\text{vergl.: } \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}))$$

$$\Delta \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} \rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) dV' - \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}', t) \delta(\vec{R}) dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-1}{c} \right)^2 \iiint \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \rho(\vec{r}', t') dV' - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{R}, t)$$

Entsprechend berechnen wir:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \rho(\vec{r}', t') dV'$$

Insgesamt erhalten wir daher:

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

Wir berechnen nun die Potentiale für ein punktförmigen Teichen, das sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit bewegt:  $\vec{r} = \vec{R}_0(t)$ .

Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{r}, t) = q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{R}_0(t))$$



Zunächst berechnen wir  $\phi(\vec{r}, t)$ . Die Ausführung der Volumenintegration wird erheblich durch den Kunstgriff der formalen Umschreibung auf ein vierdimensionales Integral vereinfacht:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) dV' dt'$$

Die Integration über  $\vec{r}'$  ist damit leicht ausführbar:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}_0(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{R}_0(t')|}{c}\right)$$

Substitution:  $u = t' - t + |\vec{r} - \vec{R}_0(t')|/c$ ,  $\frac{du}{dt'} = 1 - \frac{1}{c} \frac{(\vec{r} - \vec{R}_0(t')) \cdot \frac{d\vec{R}_0(t')}{dt'}}{|\vec{r} - \vec{R}_0(t')|}$

Liénard - Wiechert -

Potentiale

retardierter Zeitpunkt

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{R}_0(t')| - \frac{\vec{v}' \cdot (\vec{r} - \vec{R}_0(t'))}{c}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \cdot \vec{v}'}{|\vec{r} - \vec{R}_0(t')| - \frac{\vec{v}' \cdot (\vec{r} - \vec{R}_0(t'))}{c}}$$

$$t' = t - |\vec{r} - \vec{R}_0(t')|/c \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{R}_0(t')}{dt'}$$

Diese Potentiale sind die Verallgemeinerung des statischen Coulomb-Potential für den Fall einer sich beliebig bewegenden Punktladung.

Beispiel:

Gleichförmig bewegte Punktladung, die sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$  entlang der x-Achse bewegt.

Wir bestimmen zunächst den retardierten Zeitpunkt  $t'$ :

$$t' = t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{v} \cdot t'| \quad (t' < t)$$

$$t'^2 - 2t' \frac{t - \frac{v \cdot x}{c^2}}{1 - \beta^2} - \frac{\frac{r^2}{c^2} - t^2}{1 - \beta^2} = 0$$

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v \cdot x}{c^2}}{1 - \beta^2} \stackrel{(+)}{=} \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sqrt{\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)^2 + y^2 + z^2}$$

Damit ergibt sich für den Nenner der Potentiale:

$$|\vec{r} - \vec{v} \cdot t| - \frac{\vec{v}}{c} \cdot (\vec{r} - \vec{v} t) = c(t-t') - \frac{v}{c}(x-vt') = \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + y^2 + z^2}$$

Skalar-Potential 
$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{q}{\sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + y^2 + z^2}}$$

Vektopotential 
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{q \cdot \vec{v}}{\sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + y^2 + z^2}}$$

Aus  $\phi$  und  $\vec{A}$  ergeben sich die Felder:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{x-vt}{\left[\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{y}{\left[\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} \quad \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{z}{\left[\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Diese Gleichungen stellen die Transformationsgesetze der Felder einer Punktladung von ihrem Ruhesystem in ein gleichförmig bewegtes Bezugssystem (Inertialsystem) dar.

Ruhesystem der Ladung: 
$$\phi'(x', y', z', t') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

$$\vec{A}'(x', y', z', t') = 0$$

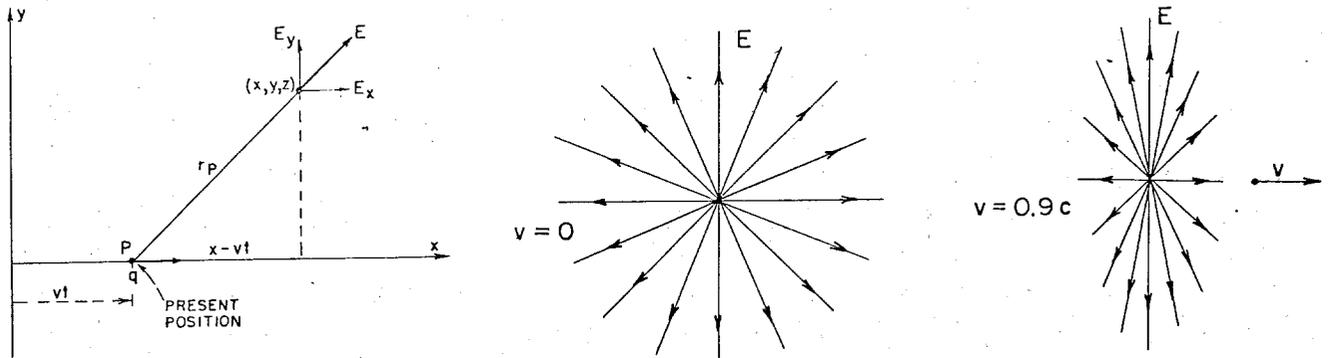
Koordinaten und Zeit transformieren sich nach der Lorentz-Transformation

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad y' = y \quad z' = z$$

Lorentz - Transformation

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$t'$  ist in dieser Bezeichnung allerdings verschieden von dem vorher benutzten retardierten Zeitpunkt. Es ist zu beachten daß die Potentiale im Laborsystem nicht einfach dadurch erhalten werden, daß man in den Formeln für  $\phi'$  und  $\vec{A}'$  die Koordinaten über die Lorentztransformation  $x', y', z' \rightarrow x, y, z$  transformiert.



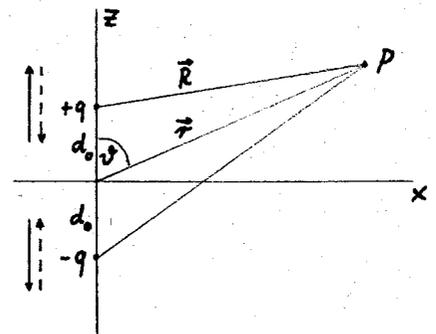
Da im Laborsystem  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in großen Entfernungen wie  $1/r^2$  gegen Null gehen, verhält sich die Energiestromdichte wie  $\vec{S} \sim 1/r^4$ . Der gesamte Energiestrom durch eine Kugeloberfläche vom Radius R strebt demnach wie  $1/R^2$  gegen Null. Eine gleichförmig bewegte Ladung strahlt daher keine Energie ab. Hierzu ist eine Beschleunigung der Ladung erforderlich.

Literatur:

Feynman lectures, vol II, Kap. 26

§7 Der Hertz' sche Dipol

Wir wollen nun als Anwendung der Liénard - Wiechert' schen Potentiale die Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen durch beschleunigte Ladungen untersuchen. Der Einfachheit halber wollen wir uns dabei vorstellen, daß wir zwei entgegengesetzt gleiche Ladungen haben, deren Abstand sich sinusförmig ändert (schwingender Dipol). Die folgenden Überlegungen gehen auf H. Hertz zurück.



Dipolmoment:  $\vec{p} = p \cdot \vec{e}_z$  :  $p(t) = +q \cdot d_0 \sin \omega t - q(-d_0 \sin \omega t) = 2q d_0 \sin \omega t$

Annahme:  $\lambda \equiv \frac{2\pi c}{\omega} \gg d_0$  d.h.  $\frac{v}{c} \ll 1$  ( $v = \text{Geschw. d. Ladung}$ )

Unter der Annahme  $\lambda \gg d_0$  dürfen wir den Dipol als punktförmig ansehen,  $r \approx R$ . Es erweist sich als zweckmäßig zuerst das Vektorpotential  $\vec{A}$  zu berechnen.

$$\text{Vektorpotential: } \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{|\vec{R}|}{c})}{|\vec{R}|} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r}$$

Bei der Berechnung des skalaren Potentials  $\phi$  müssen wir etwas vorsichtiger sein, sonst würde wegen der Ladungsneutralität des Dipols  $\phi \equiv 0$  resultieren. Wir müssten in diesem Fall eine Reihenentwicklung von  $\phi$  nach Potenzen von  $1/r$  durchführen und mit dem ersten nichtverschwindenden Term abbrechen. Wir kommen jedoch schneller zum Ziel, wenn wir die Lorentz-Konvention benutzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= -c^2 \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} \\ \phi(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{div} \frac{\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \underbrace{\frac{\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r^3} \cdot \vec{r}}_{\sim r^{-2}} + \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{c r^2} \right\} \end{aligned}$$

Die beiden Terme in  $\{\dots\dots\}$  gehen mit unterschiedlichen Potenzen von  $r$  gegen Null ( $r \rightarrow \infty$ ) bzw. gegen Unendlich ( $r \rightarrow 0$ ). Aus  $\phi$  und  $\vec{A}$  berechnen wir die Feldstärken:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\dot{\vec{p}}}{r^5} + \frac{3(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\ddot{\vec{p}}}{c r^4} + \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\ddot{\vec{p}}}{c^2 r^3} \right\}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{c r^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3} \right\}$$

Nahzone,  $r \rightarrow 0$  d.h.  $r \ll \lambda$

Es überwiegen die Glieder mit der höchsten  $r$ -Potenz in den Nennern.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\ddot{\vec{p}}}{r^5} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3} \quad \vec{p} = 2d_0 q \sin \omega t \cdot \vec{e}_z$$

(entspricht einem "statischen"  
Dipolfeld mit dem Momentanwert  $\vec{p} = \vec{p}(t)$  des Dipolmoments)

(entspricht einem "statischen"  
Magnetfeld als Folge eines Stroms  $\dot{\vec{p}}(t)$ )

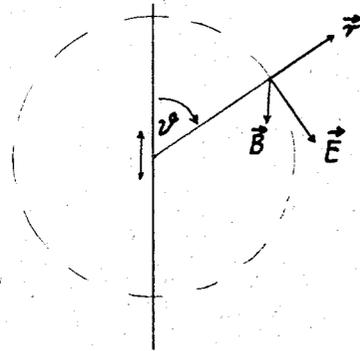
Fernzone:  $r \rightarrow \infty$  d.h.  $r \gg \lambda$

Es überwiegen die Glieder mit der niedrigsten  $r$ -Potenz in den Nennern.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \ddot{\vec{p}}}{c^2 r^3} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{c^2 r^2} \quad \vec{p} = 2d_0 q \sin \omega t \cdot \vec{e}_z$$

Erwartungsgemäß hängen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  von der Beschleunigung der Ladungen ab.  $\vec{E}$  steht senkrecht auf  $\vec{B}$ , und beide stehen senkrecht zu  $\vec{r}$ . Die Energiestromdichte  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  hat daher nur eine  $\vec{r}$ -Komponente, d. h. der Dipol strahlt eine Kugelwelle aus.

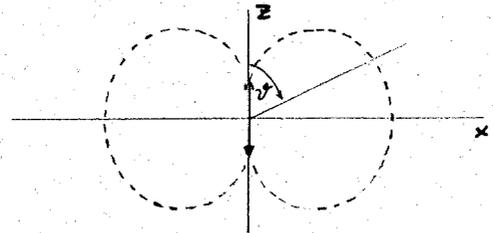
$$\vec{E} = c \cdot \vec{B} \times \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad \vec{B} = -\frac{1}{c} \vec{E} \times \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$



Poyntingvektor  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} E \cdot B \cdot \vec{e}_r$

$$S_r(r, \vartheta) = \frac{1}{\mu_0} E B = \frac{1}{\mu_0} c B^2 = \frac{1}{\mu_0} c \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right)^2 \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r})^2}{c^2 r^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\ddot{\vec{p}}(t))^2}{4\pi c^3 r^2} \sin^2 \vartheta$$

In Richtung der Dipolachse (z-Achse) findet daher keine Ausstrahlung von elektromagnetischen Wellen statt.



Wir berechnen noch die gesamte Energie die durch eine Kugelfläche vom Radius  $R$  um den Dipol ausgestrahlt wird:

$$S_{\text{ges}}(t) = \iint S(r, \vartheta) r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{\vec{p}}^2(t)}{4\pi c^3 R^2} 2\pi R^2 \int_0^\pi \underbrace{\sin^3 \vartheta d\vartheta}_{4/3}$$

$$S_{\text{ges}}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(\ddot{\vec{p}}(t))^2}{3c^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_0^2 \omega^4}{3c^2} \sin^2 \omega t \quad (p(t) = p_0 \cdot \sin \omega t)$$

Zeitlicher Mittelwert von  $S_{\text{ges}}(t)$ :

$$\overline{S}_{\text{ges}} = \frac{1}{T} \int_0^T S_{\text{ges}}(t) dt = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^2} \quad \left( T = \frac{2\pi}{\omega}, \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \right)$$

Die gesamte Leistung, die ein schwingender Dipol ausstrahlt ist daher zur vierten Potenz der Frequenz proportional  $S \sim \omega^4$ .

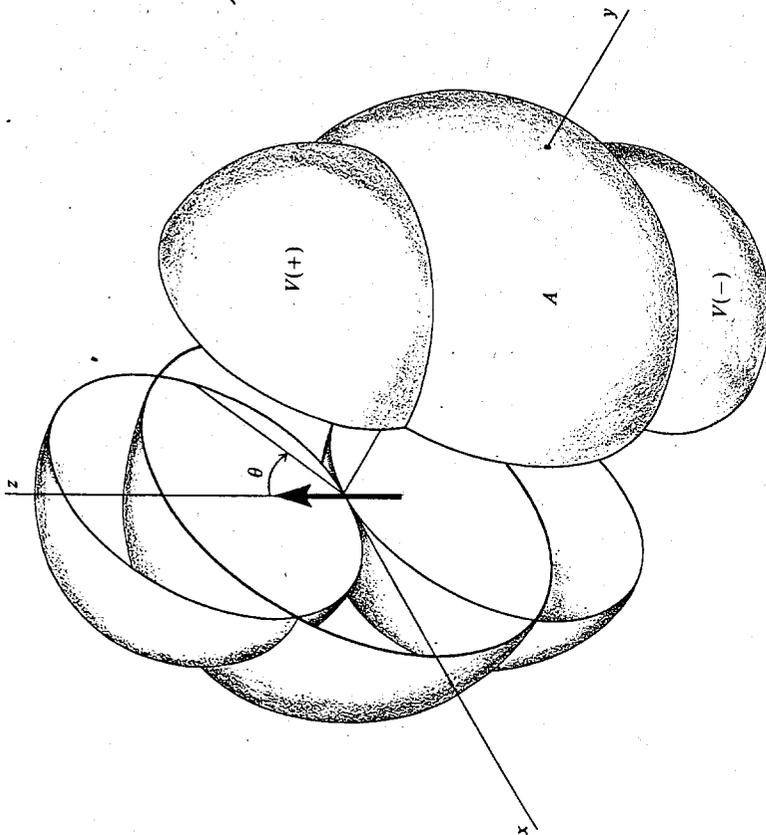


Figure 14-5. The scalar potential  $V$  and the magnitude of the vector potential  $A$  are shown here as functions of  $\theta$  and  $\varphi$  about an oscillating electric dipole oriented as shown. The radial distance from the center of the dipole to the spheres marked  $V$  is proportional to the value of  $V$  in that particular direction. The scalar potential  $V$  is maximum at the poles; it vanishes at the equator, where the individual potentials of the charge  $-Q$  and  $+Q$  of the dipole cancel. It is positive in the northern hemisphere, where the field of  $+Q$  is predominant, and negative in the southern hemisphere. The magnitude of  $A$  is similarly represented by the sphere marked  $A$ . The vector potential is independent, both in magnitude and in direction, of the coordinates  $\theta$  and  $\varphi$ .

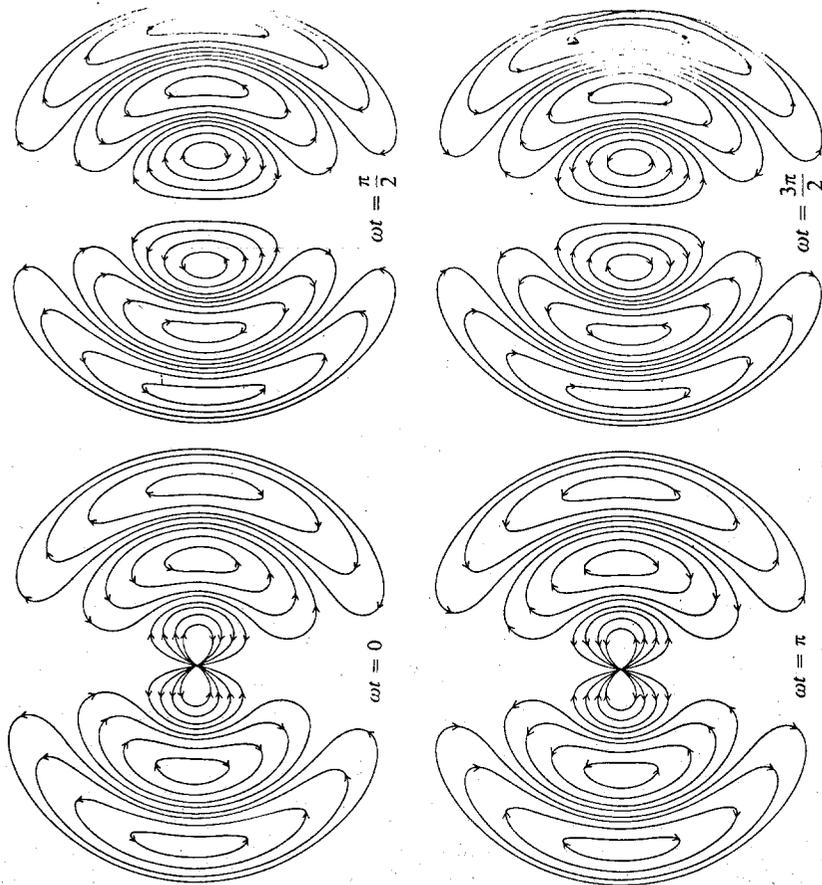


Figure 14-9. The electric lines of force of an oscillating dipole for  $\omega t = 0, \pi/2, \pi, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ . The dipole is situated in the center and is oriented in the  $y$  direction. The decrease in wavelength with distance can be observed on these figures. The magnetic lines of force are circles perpendicular to the paper and centered on the axis of the dipole.

## VI Materie im EMF

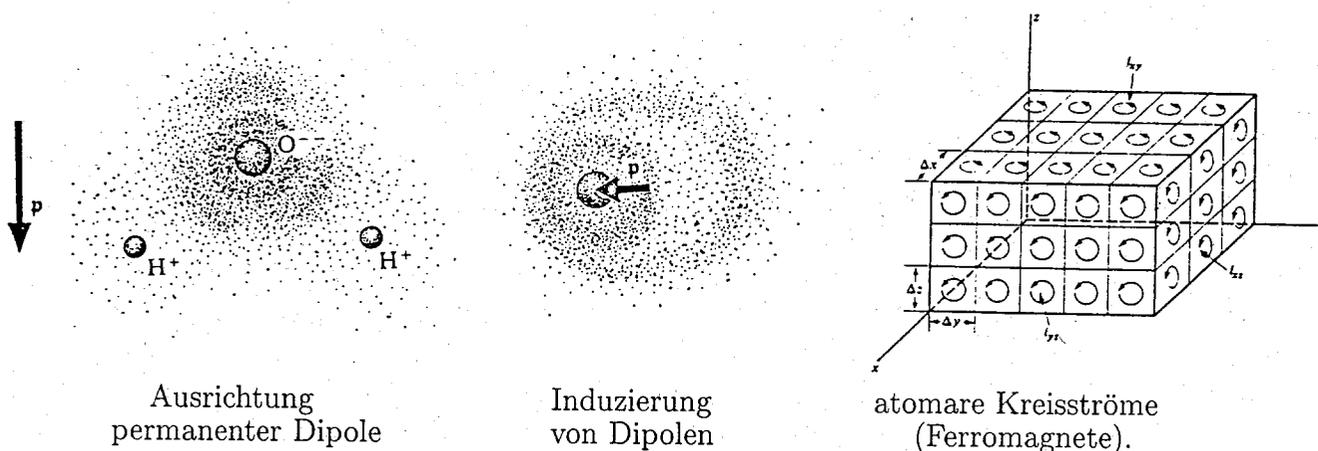
### 1 Maxwellgleichungen und die Materie-Felder P, M

Da eine exakte mikroskopische Beschreibung und Berechnung des auf atomaren Skalen stark fluktuierenden EMF's weder möglich noch wünschenswert ist, operiert die makroskopische Elektrodynamik der Materie mit Feldern, die über atomare Distanzen geglättet sind.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{E}_{\text{mikro}} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \mathbf{E}_{\text{mikro}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t) dV'$$

Die Linearabmessungen  $L$  des Mittelungsvolumen  $V_0$  seien dabei groß im Vergleich zu typischen atomaren Längen ( $\approx 1\text{\AA}$ ) aber noch klein gegenüber makroskopischen Dimensionen, d.h.  $L \approx 1\text{nm}$  bis  $1\mu\text{m}$ . (Dieser mesoskopische Bereich spielt heute in der Mikroelektronik eine zunehmend wichtigere Rolle und ist inzwischen ein wesentlicher Teil der Forschungsarbeiten unserer Fakultät.)

Meist sind die Bausteine der Materie (Atome, Moleküle) elektrisch neutral, trotzdem reagieren sie auf angelegte Felder:



Die atomistische Struktur der Materie legt es nahe die Ladungen und Ströme in zwei Klassen einzuteilen:

- makroskopische ("freie", "externe") Ladungen/Ströme.
- mikroskopische ("Polarisations- Magnetisierungs") Ladungen/Ströme".

$$\rho_{\text{mikro}} = \rho + \rho_{\text{pol}} (+\rho_{\text{mag}}), \quad (1)$$

$$\mathbf{j}_{\text{mikro}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{pol}} + \mathbf{j}_{\text{mag}}. \quad (2)$$

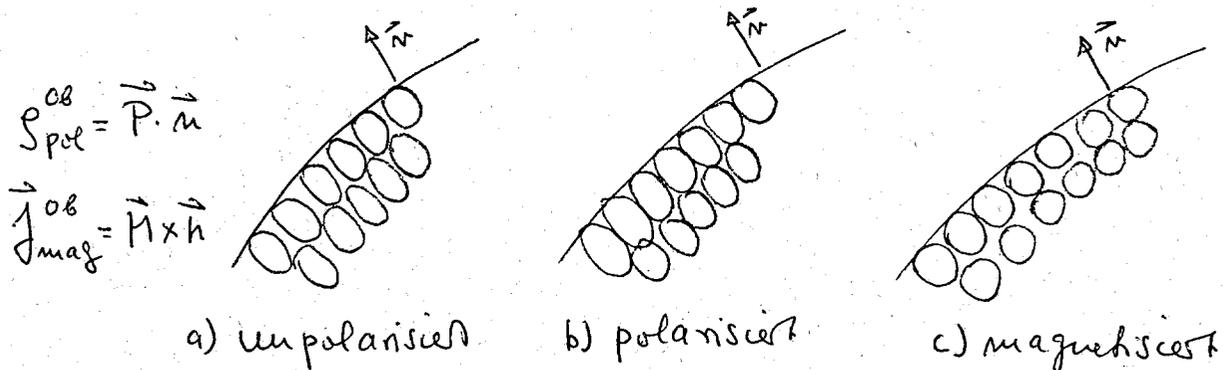
Oftmals spaltet man von den makroskopischen Anteilen die Beiträge von äusseren Quellen ab. Extern bedeutet dabei nicht notwendigerweise "ausserhalb der Materie gelegen", sondern beliebig ("von Aussen") kontrollierbar. Im Unterschied hierzu hängen die Materie-Anteile in höchst komplizierter Weise (über die Bewegungsgleichungen der Teilchen) mit den (mikroskopischen) Feldern zusammen. Der grosse Erfolg der makroskopischen Elektrodynamik liegt nun darin, dass es in den meisten Fällen gelingt die Materie-Beiträge in einfacher Weise modellmässig zu erfassen.

Die Mittelwertbildung führt zu zwei Materie-Feldern: die Polarisation  $\mathbf{P}$  und die Magnetisierung  $\mathbf{M}$ . In vielen Fällen (aber nicht immer!) können diese als die Dichten der gemittelten elektrischen und magnetischen Dipolmomente aufgefasst werden. Mit den Ladungs- und Stromdichten hängen diese folgendermassen zusammen (siehe Kap. I.4):

$$\begin{array}{l} \rho_{\text{pol}} = -\text{div } \mathbf{P}, \quad \rho_{\text{mag}} = 0, \\ \mathbf{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \mathbf{j}_{\text{mag}} = \text{rot } \mathbf{M}. \end{array}$$

Für die mikro- und makroskopischen Anteile gelten getrennt Kontinuitätsgleichungen, welche hier automatisch erfüllt sind.

An den Grenzflächen von Materie-Vakuum oder zwischen zwei verschiedenen Materialien treten Oberflächenladungen- und Ströme auf:



Damit nehmen die makroskopischen MGLs die folgende Form an:

$$\begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{M} \right), \\ \text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \text{div } \mathbf{P}), \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \end{array}$$

Dies legt die Einführung zweier neuer Felder  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  nahe:

“dielektrische Verschiebung”:  $\mathbf{D} := \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ,

“magnetische Erregung”:  $\mathbf{H} := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$ ,

in denen die MGLs besonders kompakt erscheinen:

$$\begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \end{array}$$

Diese Gleichungen müssen noch ergänzt werden durch:

- Materialgleichungen für  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  bzw.  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$ ,
- Rand- und Grenzbedingungen.

Desweiteren ist die Kraft auf die (explizit aufgeführten) makroskopischen Ladungen und Ströme gegeben durch:  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ . (Dies ist allerdings nicht die gesamte auf die Materie wirkende Kraft!)

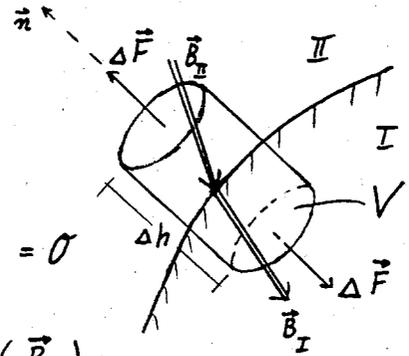
§2 Grenzbedingungen für Felder in verschiedenen Medien

Sofern wir die Maxwell-Gleichungen in Differentialform verwenden, müssen wir zur Festlegung der Lösung noch Bedingungen an die Felder an der Grenzfläche verschiedener Medien stellen.

Aus  $\text{div } \vec{E} = 0$  folgt, daß die Normalkomponente von  $\vec{E}$  stetig ist.

Beweis

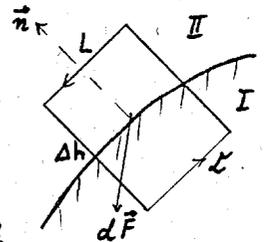
$$\iiint_V \text{div } \vec{B} dV = \oint_{\mathcal{F}} \vec{B} \cdot d\vec{F} = \sigma$$



$$[(\vec{B}_{II})_n - (\vec{B}_{I})_n] \cdot \Delta F + (\text{Glieder mit } \Delta h) = 0$$

$$\Delta h \rightarrow 0, \Delta F \text{ beliebig} : (\vec{B}_{II})_n = (\vec{B}_{I})_n$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{Ges}} : \iint_{\mathcal{L}} \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{F} = \oint_{\mathcal{L}} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{L}} \vec{j} \cdot d\vec{F}$$



$$[(\vec{H}_{II})_t - (\vec{H}_{I})_t] \cdot L + (\text{Glieder mit } \Delta h) = \vec{j}_{\text{ob}}$$

$$(\Delta h \rightarrow 0, L \text{ beliebig})$$

$\vec{j}_{\text{ob}}$  bezeichnet den Anteil des Stromes, der senkrecht zu der von  $\vec{n}$  und  $\vec{H}$  aufgespannten Ebene (d.h. in Richtung von  $\vec{n} \times \vec{t}$ ) auf der Grenzfläche der beiden Medien fließt.

Aus  $\text{div } \vec{D} = \rho(\vec{r})$  folgt  $D_{IIIn} - D_{In} = \sigma$  (Oberflächenladungsdichte), und aus  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  folgt  $\vec{E}_{IIIt} - \vec{E}_{It} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Big|_t$ ; dieser Term ist im allgemeinen 0. Ebenso kann  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  bei der Bildung von  $(\vec{j}_{\text{ges}})_{\text{oberf}} \Rightarrow \vec{j}_{\text{ob}}$  unberücksichtigt bleiben.

Grenzbedingungen:

Elektrisches Feld

Magnetfeld

Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} (\vec{D}_{II} - \vec{D}_{I}) \cdot \vec{n} &= \sigma \\ (\vec{E}_{II} - \vec{E}_{I}) \cdot \vec{t} &= 0 \quad \text{oder} \quad \vec{n} \times (\vec{E}_{II} - \vec{E}_{I}) = 0 \\ (\vec{B}_{II} - \vec{B}_{I}) \cdot \vec{n} &= 0 \\ (\vec{H}_{II} - \vec{H}_{I}) \cdot \vec{t} &= \vec{j}_{\text{ob}} \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \quad \text{oder} \quad \vec{n} \times (\vec{H}_{II} - \vec{H}_{I}) = (\vec{j}_{\text{ob}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})_{\text{ob}} \\ (\vec{j}_{II} - \vec{j}_{I}) \cdot \vec{n} &= -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung resultiert aus:  $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

### § 3 Materialgleichungen (für statische Felder)

In vielen Fällen sind die an die Materie angelegten Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  wesentlich schwächer, als die atomaren Felder  $\vec{e}$  ( $\sim 10^9$  V/cm) und  $\vec{b}$  ( $\sim 10^5$  Tesla), sodaß man  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  im allgemeinen als kleine Störungen von  $\vec{e}$  und  $\vec{b}$  ansehen darf. Es ist daher naheliegend eine Reihenentwicklung für  $\vec{P}$  und  $\vec{M}$  in  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  anzusetzen. Z.B für homogene und isotrope Materialien:

$$\vec{P}(\vec{E}) = \vec{P}_0 + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} + \gamma_e E^2 \left(\frac{\vec{E}}{E}\right) + \dots \quad \text{bzw.} \quad \vec{D} = \vec{P}_0 + \epsilon \epsilon_0 \vec{E} + \dots \quad \epsilon = 1 + \chi_e$$

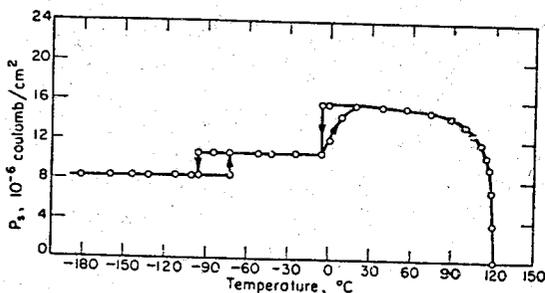
$$\vec{M}(\vec{H}) = \vec{M}_0 + \chi_m \vec{H} + \gamma_m H^2 \left(\frac{\vec{H}}{H}\right) + \dots \quad \vec{B} = \vec{M}_0 + \mu_0 \mu \vec{H} + \dots \quad \mu = 1 + \chi_m$$

(Eine Relation  $\vec{M} = \vec{M}(\vec{B})$  wäre hier naheliegender als  $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$ . Außerdem könnte  $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}, \vec{H})$  sowohl von  $\vec{E}$  als auch von  $\vec{H}$  abhängen ( $\hat{=}$  magneto-optische Effekte!), ebenso für  $\vec{M}$ ).

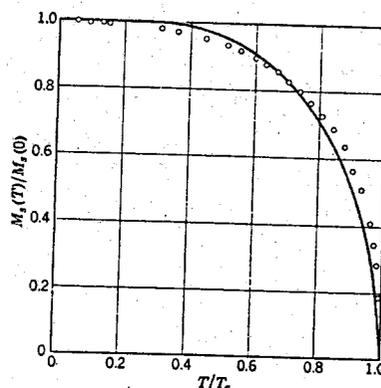
Wir diskutieren die einzelnen Terme dieser Entwicklung:

#### $\vec{P}_0$ ( $\vec{M}_0$ )

In der Mehrzahl der Fälle sind  $\vec{P}_0 = 0$  und  $\vec{M}_0 = 0$ . Es gibt jedoch auch Materie, die spontan polarisiert (Ferroelektrika) oder magnetisiert (Ferromagnetika) sind.  $P_0 = P_0(T)$ ,  $M_0 = M_0(T)$  hängen von weiteren Variablen wie z.B. Temperatur  $T$  oder Druck ab.



Spontaneous polarization of BaTiO<sub>3</sub>, measured along the pseudo-cubic edge as a function of temperature (according to Merz (M1)).



Ni :  $T_c = 631^\circ\text{K}$ ,  $M_0 = 510$  Gauss

#### $\chi_e \vec{E}$ ( $\chi_m \vec{H}$ )

$\chi_e$ ,  $\chi_m$  heißen elektrische (magnetische) Suszeptibilität und hängen mit der Dielektrizitätskonstanten (= Permittivität) und der magnetischen Permeabilität durch  $\epsilon = 1 + \chi_e$ ,  $\mu = 1 + \chi_m$  zusammen. Es ist  $\chi_e \geq 0$  während  $\chi_m$  auch negativ sein kann. Es gilt jedoch  $\chi_m > -1$ . Stoffe mit  $-1 < \chi_m < 0$  heißen diamagnetisch, solche mit  $\chi_m > 0$  paramagnetisch.

freie Elektronen (Metalle)  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ,  $\sigma = \text{Leitfähigkeit}$ .

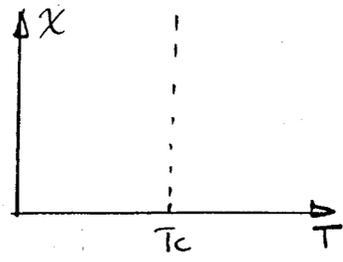
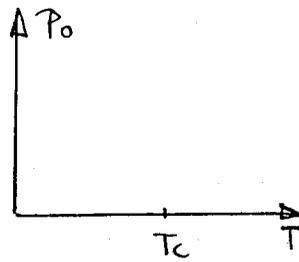
§4 Ferroelektrikum im Plattenkondensator

Materialgleichungen

$$P = P_0(T) + \epsilon_0 \chi E$$

$$D = \epsilon_0 E + P$$

$$= P_0(T) + \epsilon_0 \underbrace{(\chi+1)}_E E$$



a) Platte im Vakuum

$$P_{ext} = 0$$

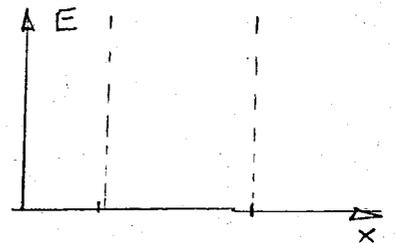
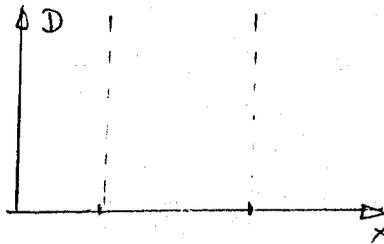
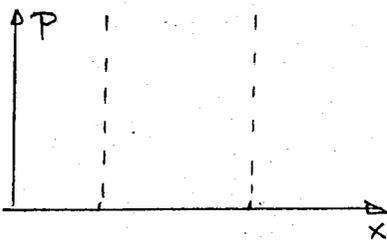
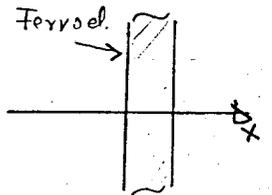
$$\text{div } \vec{D} = 0$$

$$D(x) =$$

$$P_f = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$$E(x) =$$



Oberflächenladungsdichte der real vorhandenen Ladungen  $\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n}$  führt zu einer enormen Feldstärke  $E = -P/\epsilon_0 \epsilon = 5 \cdot 10^8 \text{ V/cm}$ . In Praxis zieht ein Ferroelektrikum daher stets Ionen aus der Umgebung an, kompensiert daher die Oberflächenladung, und macht so  $E = 0$ .

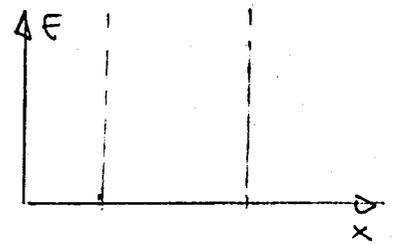
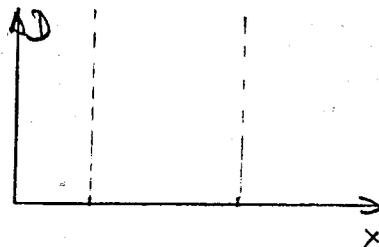
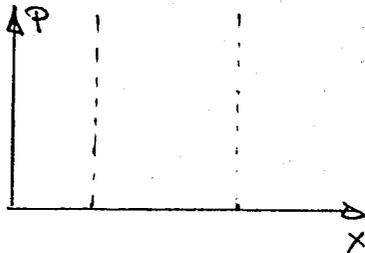
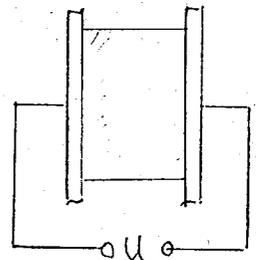
b) Platte im Kondensator.

im Ferroel. ist  $P_f = 0$ ,  $P_{ext} = 0$

$$\leadsto D = P_0 + \epsilon_0 \epsilon E =$$

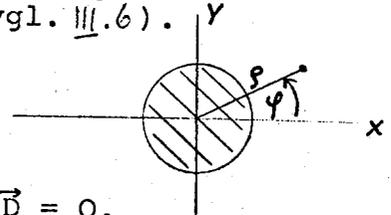
$$E =$$

aufserhalb des Ferroel.



### §5 Polarisierung eines dielektrischen Zylinders in einem angelegten Feld

Ohne das Dielektrikum sei das angelegte  $\vec{E}$ -Feld homogen und parallel zur y-Achse. Wir wollen untersuchen, wie das  $\vec{E}$ -Feld durch Einbringen eines zylinderförmigen Dielektrikums (das parallel zur z-Achse liegt) verzerrt wird (vgl. III.6). Der Zylinder ist nicht geladen.



#### Lösungsstrategie:

- 1) Maxwell-Gleichungen:  $\text{rot } \vec{E} = 0$  ,  $\text{div } \vec{D} = 0$ .  
 Innenraum :  $\rho \leq R$  ,  $\vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}_i$   $\vec{E}_i = -\text{grad } \phi_i$  mit  $\Delta \phi_i = 0$   
 Außenraum :  $\rho \geq R$  ,  $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$   $\vec{E}_a = -\text{grad } \phi_a$  mit  $\Delta \phi_a = 0$

- 2) Finde Lösungen  $\phi_n$  von  $\Delta \phi = 0$  und superponiere diese für den Innen bzw. Außenraum:

$$\phi_{i,a} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{i,a} \cdot \phi_n(\vec{r})$$

In unserem Fall hängen die  $\phi_n(\vec{r}) \equiv \phi_n(\rho, \varphi)$  nicht von z ab.

- 3) Bestimme die unbekanntenen Koeffizienten  $C_n$  aus der Stetigkeit von  $E_t$  und  $D_n$  auf der Mantelfläche und aus den Bedingungen, daß der Zylinder ungeladen ist, und daß das  $\vec{E}$ -Feld für große Abstände gegen ein in y-Richtung homogenes  $\vec{E}$ -Feld streben soll (asymptotisches Feld).

$$\vec{E}_a = E_0 \cdot \vec{e}_y \quad \text{b.z.w.} \quad \phi_a(\rho, \varphi, z) = -E_0 \cdot y = -E_0 \cdot \rho \cdot \sin \varphi$$

#### Zu Punkt 2.

Lösungen zu  $\Delta \phi = 0$  finden wir mit Hilfe des Separationsansatzes:

$$\phi(\rho, \varphi) = F(\rho) \cdot G(\varphi)$$

In Zylinderkoordinaten ist

$$\Delta \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \cdot \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} \right) G(\varphi) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 G(\varphi)}{\partial \varphi^2} \cdot F(\rho) = 0$$

Dividiere durch  $F(\rho) \cdot G(\varphi)$  und multipliziere mit  $\rho^2$ :

$$\left\{ \frac{\rho}{F(\rho)} \cdot \frac{d}{d\rho} (\rho \cdot F'(\rho)) \right\} + \left\{ \frac{G''(\varphi)}{G(\varphi)} \right\} = 0$$

Da  $\rho$  und  $\varphi$  unabhängige Variablen sind, kann diese Gleichung nur dann erfüllt sein, wenn  $\{ \dots \}$  gleich einer Konstanten ist.

Es ist zweckmäßig  $\{ G''(\varphi)/G(\varphi) \} = -m^2$  zu nennen ( $-m^2$  ist die "Separationskonstante").

$$\text{Gleichung für } G(\varphi) : G''(\varphi) + m^2 G(\varphi) = 0$$

$$G_m(\varphi) = g_m \sin(m\varphi) + \tilde{g}_m \cos(m\varphi)$$

$$\text{Gleichung für } F(\rho) : \rho \frac{d}{d\rho} (\rho \cdot F'(\rho)) - m^2 F(\rho) = 0$$

$$m \neq 0: F_m(\rho) = f_m \rho^m + \tilde{f}_m \rho^{-m} \quad m = 0: F_0(\rho) = f_0 + \tilde{f}_0 \ln \rho$$

$g_m, \tilde{g}_m, f_m, \tilde{f}_m, f_0, \tilde{f}_0$  sind frei wählbare Konstanten.  
Die Eindeutigkeit von  $\Phi(\rho, \varphi) [\equiv \Phi(\rho, \varphi + 2\pi)]$  fordert, daß  $m$  nur ganzzahlige Werte annimmt. Weiterhin sind die Funktionen  $m < 0$  äquivalent zu  $m > 0$ . Die allgemeinste Lösung, die mit einem Separationsansatz zu erzielen ist, lautet demnach:

Außenraum,  $\rho \geq R$

$$\Phi_a(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \ln\left(\frac{\rho}{R}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^m (a_m \sin m\varphi + b_m \cos m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^m (c_m \sin m\varphi + d_m \cos m\varphi)$$

Für den Innenraum hätten wir eine entsprechende Lösung anzusetzen. Das Innenfeld ist jedoch einfacher: es ist homogen und parallel zur  $y$ -Achse.

Innenfeld:  $\Phi_i(\rho, \varphi) = \alpha + \beta \cdot \rho \cdot \sin \varphi$

Zu Punkt 3.

Wir bestimmen die noch freien Konstanten  $\alpha, \beta, a_0, b_0, a_m, b_m, c_m, d_m$

i) Zylinder ist ungeladen:  $b_0 = 0$

ii) für  $\rho \gg R$  gilt:

$$a_1 = -R E_0, \quad a_2 = a_3 = a_4 \dots = 0, \quad b_1 = b_2 = b_3 \dots = 0,$$

iii) Stetigkeit von  $E_t \equiv E_\varphi = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (\rho = R)$

$$-\beta \cos \varphi = -\frac{1}{R} a_1 \cos \varphi - \frac{1}{R} \sum_{m=1}^{\infty} (m c_m \cos m\varphi - m d_m \sin m\varphi)$$

$$\leadsto \beta = \frac{1}{R} a_1 + \frac{1}{R} c_1, \quad c_2 = c_3 = c_4 \dots = 0, \quad d_1 = d_2 = d_3 \dots = 0$$

iv) Stetigkeit von  $D_n \equiv D_\rho = -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}$  bzw.  $-\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}$

$$-\epsilon \epsilon_0 \beta \sin \varphi = -\epsilon_0 \left( \frac{1}{R} a_1 \sin \varphi - \frac{R}{\rho^2} c_1 \sin \varphi \right) \quad \rho = R$$

$$\leadsto \epsilon \cdot \beta = (a_1 - c_1) / R$$

Die einzigen, von Null verschiedenen Konstanten, sind demnach  $a_1, c_1, \beta$ .  $\alpha = 0, a_0 = 0$  können willkürlich Null gesetzt werden, da sie keinen Einfluß auf die Felder haben.

$$a_1 = -R E_0 \quad c_1 = R E_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \quad \beta = -\frac{2}{1 + \epsilon} E_0$$

InnenfeldAußenfeld

$$\phi_i(\vec{r}) = -\frac{2E_0}{1+\epsilon} \cdot y$$

$$\phi_a(\vec{r}) = -\rho E_0 y + \frac{R^2 E_0}{\rho} \cdot \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \sin \varphi$$

$$\vec{E}_i = \frac{2}{\epsilon+1} \cdot E_0 \cdot \vec{e}_y = \frac{2}{\epsilon+1} \cdot \vec{E}_{as}$$

$$\vec{E}_a = E_0 \cdot \vec{e}_y + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2(\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^3}$$

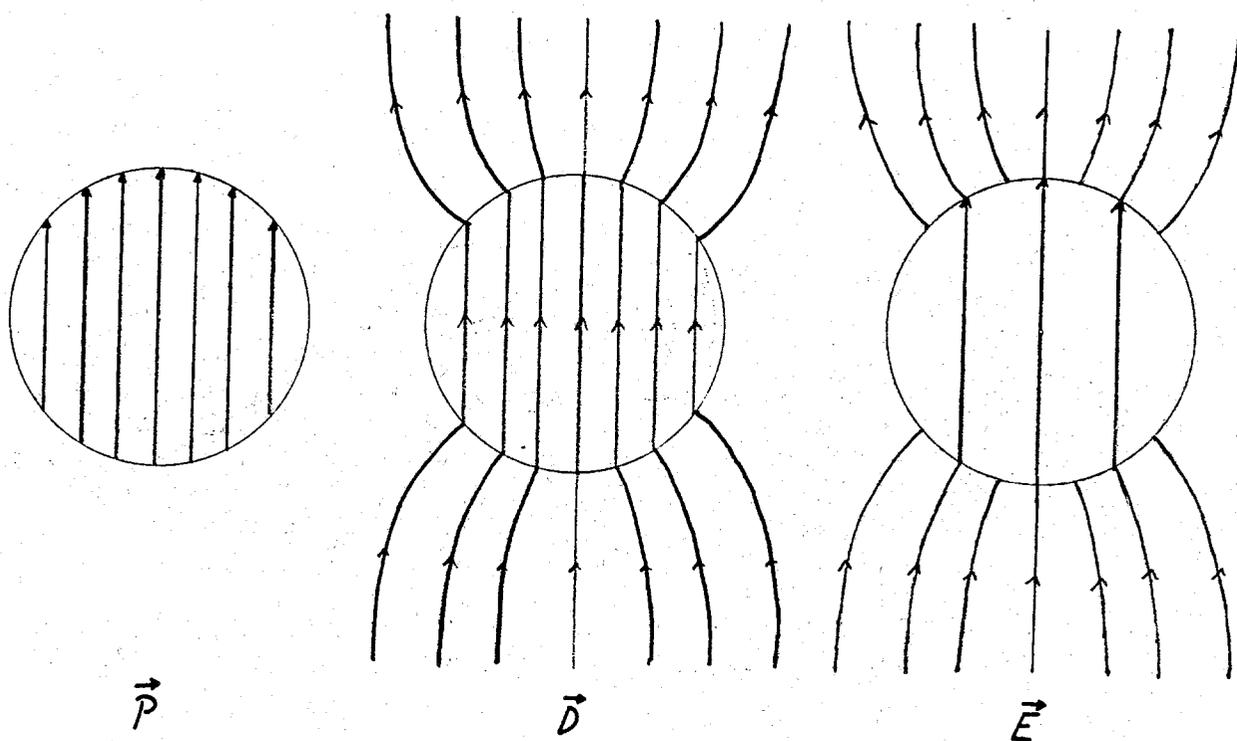
$$\vec{D}_i = \epsilon_0 \frac{2\epsilon}{\epsilon+1} \cdot E_0 \cdot \vec{e}_y = \epsilon_0 \frac{2}{\epsilon+1} \vec{E}_{as}$$

$$\vec{D}_a = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_a \quad (\vec{p} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y)$$

$$\vec{P} = \vec{D}_i - \epsilon_0 \vec{E}_i = 2\epsilon_0 \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \cdot \vec{E}_{as}$$

$$\vec{P} \equiv 0$$

$$\vec{p} = 2\pi\epsilon_0 R^2 \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \cdot \vec{E}_{as}$$



Das Innenfeld ist homogen, das Außenfeld stellt die Überlagerung des angelegten Feldes und eines "zylindrischen" Dipolfeldes dar.  $\vec{p}$  ist das induzierte Dipolmoment des Zylinders. Durch die Polarisation des Dielektrikums ist das Innenfeld  $\vec{E}_i$  kleiner als das angelegte Feld  $\vec{E}_{as}$ .

$$\vec{E}_i - \vec{E}_{as} = -\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \vec{E}_{as} = -\frac{1}{2} \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

Der Grund warum das Außenfeld nur einen Dipolanteil enthält ist einfach einzusehen. Das angelegte  $\vec{E}$ -Feld definiert eine Richtung (d.h. einen Vektor). Da  $\vec{E}$  senkrecht zum Zylinder steht, ist das Dielektrikum in der x-y-Ebene elektrisch isotrop, d.h. es existiert keine Vorzugsrichtung. Alle induzierten Multipole müssen sich daher wie Vektoren verhalten, die parallel zu  $\vec{E}$  sind.

Der einzige Multipol mit Vektorcharakter ist jedoch ein Dipol! (Ein Monopol (richtungsunabhängige Größe) scheidet aus, da der Zylinder keine Ladung trägt.)

Der Vollständigkeit halber führen wir noch die Lösung für eine dielektrische Kugel in einem zur z-Achse parallelen, homogenen Feld an.  $\vec{E}_{as} = E_0 \cdot \vec{e}_z$

<u>Innenraum</u> ( $r \leq R$ )	<u>Außenraum</u> ( $r \geq R$ )
$\Phi_i(r, \vartheta) = -\frac{3}{\epsilon+2} \cdot E_0 \cdot z$	$\Phi_a(\vec{r}) = -E_0 z + \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} R^3 E_0 \frac{\cos \vartheta}{r^2}$
$\vec{E}_i = \frac{3}{\epsilon+2} \vec{E}_{as}$	$\vec{E}_a = \vec{E}_{as} + \text{Feld eines Dipols}$
$\vec{D}_i = \epsilon_0 \frac{3\epsilon}{\epsilon+2} \vec{E}_{as}$	$\vec{D}_a = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_a$
$\vec{P} = \vec{D}_i - \epsilon_0 \vec{E}_i = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \vec{E}_{as}$	$\vec{P} \equiv 0$

Differenz zwischen dem Innenfeld  $\vec{E}_i$  und dem Feld bei Abwesenheit des Dielektrikums :

$$\vec{E}_i - \vec{E}_{as} = -\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \vec{E}_{as} = -\frac{1}{3} \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

Allgemein gilt, daß ein Ellipsoid (bzw. eine Platte oder ein Zylinder) in einem asymptotisch homogenen Feld homogen polarisiert wird. Daher werden diese Geometrien bevorzugt benutzt (Für komplizierte Probenformen wird das Feld im Innern des Dielektrikums inhomogen ( und ziemlich schwer berechenbar!) auch wenn das angelegte Feld homogen war.)

In dem obigen Fall folgt dann:

$$\vec{E}_i - \vec{E}_{as} = -N \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

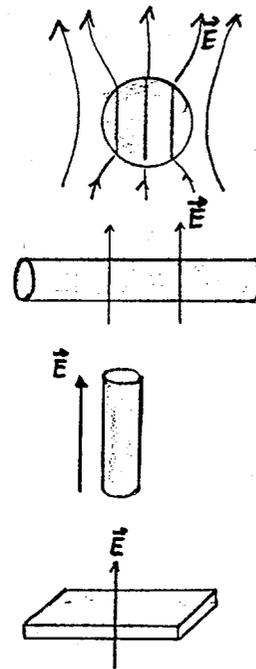
N ist der Entelektrisierungsfaktor.

Kugel :  $N = 1/3$

Zylinder :  $N = 1/2$   
(quer zur Achse)

Zylinder :  $N = 0$   
(parallel z.Achse)

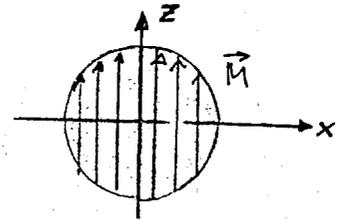
Platte :  $N = 1$



aus  $\vec{P}_i = \chi_{el} \cdot \vec{E}_i$   
folgt:  
$$\vec{E}_i = \frac{1}{1 + N \chi_{el}} \vec{E}_{as}$$
  
$$\vec{P} = \frac{\chi_{el}}{1 + N \chi_{el}} \vec{E}_{as}$$

§6 Das Feld einer homogen magnetisierten Kugel

In diesem Beispiel wollen wir das Feld eines Permanentmagneten unter Voraussetzung homogener Magnetisierung berechnen. Der Einfachheit halber wollen wir den Magneten als kugelförmig annehmen. Wir berechnen zunächst die Lösungen der Maxwellgleichungen für den Innen- und den Außenraum getrennt und fordern die Stetigkeit von  $H_t$  und  $B_n$  auf der Oberfläche

Innenraum ( $r < R$ ):

$$\operatorname{div} \vec{B}_i = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}_i = 0 \leadsto \operatorname{rot} \vec{B}_i = 0$$

$$\mu_0 \vec{H}_i = \vec{B}_i - \mu_0 \vec{M}_i \quad (\vec{M} = \vec{M}_i = M_0 \vec{e}_z)$$

Außenraum ( $r > R$ ):

$$\operatorname{div} \vec{B}_a = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}_a = 0 \leadsto \operatorname{rot} \vec{B}_a = 0$$

$$\mu_0 \vec{H}_a = \vec{B}_a$$

Da in beiden Fällen  $\operatorname{rot} \vec{B} = 0$  gilt, ist  $\vec{B} = -\operatorname{grad} \psi$  mit  $\Delta \psi = 0$  ( $\psi$  ist das magnetische Potential). Die Lösung von  $\Delta \psi = 0$  in Kugelkoordinaten ist uns bereits aus III.4 bekannt. Wegen der Rotationssymmetrie um die z-Achse hängt  $\psi(r, \vartheta)$  nicht vom Winkel  $\varphi$  ab.

Innenraum: 
$$\psi_i(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) \cdot P_l(\cos \vartheta)$$

$$B_r(r, \vartheta) = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\sum_{l=0}^{\infty} \left( l \cdot a_l r^{l-1} - \frac{(l+1) b_l}{r^{l+2}} \right) \cdot P_l(\cos \vartheta)$$

$$B_\vartheta(r, \vartheta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P'_l(\cos \vartheta) \cdot (-\sin \vartheta)$$

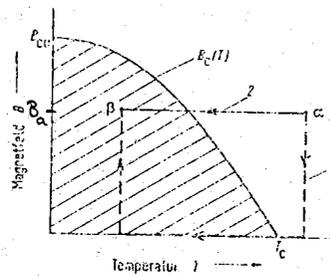
Außenraum:

$$\psi_a(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \alpha_l r^l + \frac{\beta_l}{r^{l+1}} \right) \cdot P_l(\cos \vartheta)$$

§.7 Das Verhalten eines Supraleiters im Magnetfeld (Meissner-Effekt)

Lange Zeit glaubte man, daß es die einzige charakteristische Eigenschaft des Supraleiters sei, keinen meßbaren (Gleichstrom-) Widerstand zu besitzen. Wäre diese Vorstellung richtig, so würde man für die gleichen äußeren Variablen  $T$  (Temperatur),  $\vec{B}$  je nach Versuchsbedingung ganz verschiedene Zustände erhalten! Wir erläutern dies für einen stabförmigen Supraleiter (Entmagnetisierungsfaktor = 0 d. h., das Feld an der Oberfläche ist identisch mit dem Außenfeld in großer Entfernung von der Probe.)

Im Anfangszustand  $\alpha$  ( $T > T_c$ ) und Endzustand  $\beta$  ( $T < T_c$ ) befindet sich die Probe im Magnetfeld  $B_a$ . Wir können  $\beta$  auf zwei verschiedenen Wegen 1 und 2 erreichen.



Weg 2: Probe wird in konstantem  $\vec{B}$ -Feld abgekühlt ( $\dot{B} = 0$ ):



$T = T_\alpha > T_c$   
 $B = B_a$

da  $\frac{d\vec{B}}{dt} = 0$ , werden keine Induktionsströme angeworfen

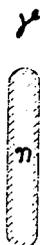


$T = T_\beta < T_c$   
 $B = B_a$

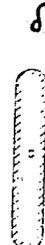
Weg 1:



Ausschalten des  $\vec{B}$ -Felds



Abkühlen



Anschalten des  $\vec{B}$ -Felds



Beim Aus- bzw. Einschalten des  $\vec{B}$ -Felds werden Induktionsströme angeworfen. Im Gegensatz zu  $\alpha \rightarrow \gamma$  (Probe normalleitend) klingen diese Ströme bei einem idealen Leiter  $\delta \rightarrow \beta$  nicht ab und machen das Probeninnere feldfrei (Lenz'sche Regel). Für einen idealen Leiter wären die auf den Wegen 1 und 2 erreichten Endzustände daher verschieden. Meissner und Ochsenfeld konnten durch ihre berühmt gewordenen Versuche 1933 zeigen, daß der supraleitende Zustand neben der Eigenschaft  $R = 0$  noch die wichtige Eigenschaft hat, ein Magnetfeld immer - unabhängig von der Versuchsdurchführung - aus seinem Inneren zu verdrängen.

Materialgleichungen eines Supraleiters:

$$1. \text{ London-Gleichung} \quad \frac{d}{dt} \Lambda \vec{j} = \vec{E}, \quad \Lambda = \frac{m}{n_e e^2}$$

$$2. \text{ London-Gleichung} \quad \text{rot}(\Lambda \vec{j}) = -\vec{B}$$

Die zweite L. Gl. hat frappante Ähnlichkeit mit  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  (mit  $\vec{E}$  aus 1. L. Gl.), sofern diese nach  $t$  integriert wird.

Die erste Gleichung beschreibt einen Leiter mit  $R = 0$ . In ihm werden die Ladungen unter dem Einfluß eines elektrischen Felds gleichförmig beschleunigt. F. und H. London mußten noch annehmen, daß es sich um Einzelelektronen handelt. Wir wissen heute, daß gepaarte Elektronen (mit entgegengesetzt gleichen Impulsen und Spins), die Cooper-Paare, den Suprastrom tragen. Sie haben die Masse  $2m$ , die Ladung  $2e$ , und ihre Anzahldichte  $n_c$  ist für die Temperatur  $T = 0$  gleich  $n_e/2$ , wenn  $n_e$  die Dichte der Einzelelektronen ist. Der Zahlenwert von  $\Lambda$  ändert sich also nicht beim

Übergang vom Bild der Einzelelektronen zu Cooperpaaren.

Für Temperaturen  $T \neq 0$  ändert sich die Cooperdichte

$n_c = n_c(T)$ , insbesondere geht  $n_c(T) \sim (1-T/T_c)$  für  $T \rightarrow T_c$  gegen Null. Die Differenz  $n_e - 2n_c$  repräsentiert dann diejenigen Elektronen, die nicht zum Suprastrom beitragen und für einen Normalstrom gemäß  $j_{\text{normal}} = \sigma \vec{E}$  verantwortlich sind.

Im Supraleiter ist jedoch  $E = 0$ , d.h.  $j_{\text{normal}}$  bringt (in nahezu allen Fällen) keinen Beitrag.

Um Entmagnetisierungseffekte auszuschließen (Feld an der Oberfläche soll gleich dem angelegten Feld sein) wählen wir einen supraleitenden Halbraum mit der y-z-Ebene als Oberfläche.  $\vec{B} = B_z(x) \vec{e}_z$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{2. London-Gleichung } \text{rot} \wedge \vec{j} = -\vec{B} \\ \text{Maxwell-Gleichung } \text{rot} \vec{H} = \vec{j} \end{array} \right\} \text{rot rot } \vec{B} = -\frac{\mu_0}{\Lambda} \vec{B}$$

Da alle Elektronen als freie Elektronen zählen, ist für einen Supraleiter  $\vec{M} = 0$ , d.h.  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  (Der geringe Beitrag gebundener Elektronen zu  $\vec{M}$ , oder Elektronen, die nicht zu  $n = n(T)$  zählen, kann hier außer acht bleiben.)

Die Operation  $\text{rot rot } \vec{B}$  läßt sich umformen:

$$\text{rot rot } \vec{B} = -\Delta \vec{B} + \text{grad div } \vec{B} = -\Delta \vec{B} \quad (\text{da } \text{div } \vec{B} = 0)$$

Gleichung für  $\vec{B}$  im Supraleiter

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = 0 \quad \lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{\mu_0}}$$

Aus Symmetriegründen hat in unserem Fall  $\vec{B}$  nur eine z-Komponente, die allein von x abhängt.

$$x \geq 0 \quad B_z''(x) - \frac{1}{\lambda^2} B_z(x) = 0 \quad \wedge \quad B_z(x) = a e^{x/\lambda} + b e^{-x/\lambda}$$

$$x \leq 0 \quad B_z(x) \equiv B_a \quad (\text{nach Voraussetzung})$$

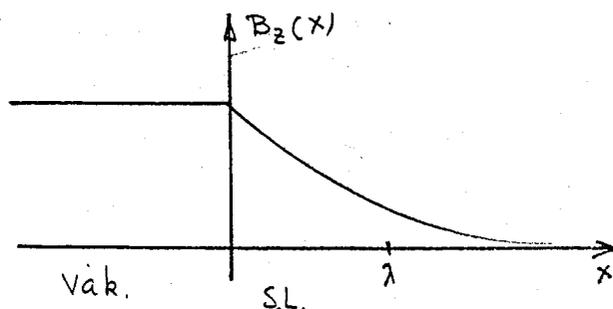
Die Konstanten a, b bestimmen wir aus den Bedingungen:

i)  $x \rightarrow +\infty$   $B_z(x)$  endlich :  $a = 0$

ii)  $B_z(x)$  bei  $x = 0$  stetig :  $b = B_a$

Ergebnis:

$$B_z(x) = \begin{cases} B_a & x \leq 0 \\ B_a \cdot e^{-x/\lambda} & x \geq 0 \end{cases}$$

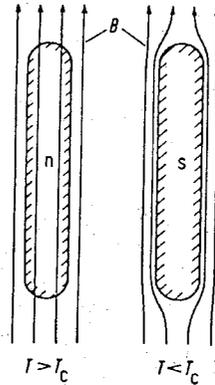


Man nennt  $\lambda = \sqrt{\Lambda/\mu_0}$  die London'sche Eindringtiefe. Einen

grobe Wert für  $\lambda$  erhalten wir, unter der sicher nicht ganz richtigen Annahme, daß ein Elektron pro Atom mit der Masse des freien Elektrons zum Suprastrom beiträgt. Für Zinn liefert diese Abschätzung  $\lambda = 260 \text{ \AA}$ . Der experimentelle Wert ist  $\lambda_{\text{exp}} = 510 \text{ \AA}$ . Da  $n(T) = n(0) \cdot (1 - T/T_c)$  eine Funktion der Temperatur ist, wird auch  $\lambda$  temperaturabhängig: mit  $T \rightarrow T_c$  geht die Eindringtiefe wie  $\lambda(T) = \lambda(0)(1 - T/T_c)^{-1/2}$  gegen Unendlich: das  $\vec{B}$ -Feld dringt mehr und mehr in den Supraleiter ein. Nach  $\vec{j} = 1/\mu_0 \text{ rot } \vec{B}$  fließt im Supraleiter ein Dauerstrom  $\vec{j}$ , ebenso wie  $\vec{B}$ , auf eine Schichtdicke  $\lambda$  an der Oberfläche konzentriert ist.

Suprastrom : 
$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_z(x)}{\partial x} \vec{e}_y = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} e^{-x/\lambda} \quad (x \geq 0)$$

Wir wollen den Verdrängungseffekt des  $\vec{B}$ -Feldes wegen seiner Bedeutung noch auf eine andere Weise darstellen. Die Abschirmströme, die das Außenfeld im Innern der Probe vollständig kompensieren (abgesehen von einer Oberflächenschicht der Dicke  $\lambda$ ), geben der Probe ein magnetisches Moment  $\vec{m}$ . Solange wir nur am Außenfeld interessiert sind, können wir formal von einer Magnetisierung  $\vec{M}$  sprechen, indem wir setzen  $\vec{M} = \vec{m}/V$ . Diese Magnetisierung entspricht dann derjenigen eines idealen Diamagneten mit einer Suszeptibilität  $\chi_m = -1$ .



Feldverdrängung bei einer stabförmigen Probe. Die Probe wird im Feld  $B$  abgekühlt.

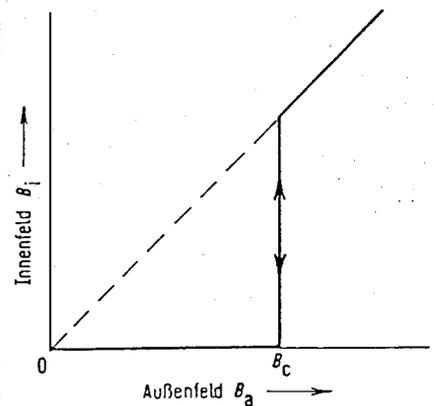
Meissner - Phase:

Innen:  $\vec{B}_i = \vec{H}_i = \vec{M} = 0$

Oberfläche:  $\vec{j}_{\text{ob}} \neq 0$

Außen:  $\vec{B}_a = \mu_0 \vec{H}_a$

$\vec{B}$  angelegt  $\vec{B}_{\text{Probe}}$  (Folge von  $\vec{j}_{\text{ob}}$ )



Vereinfachte Beschreibung

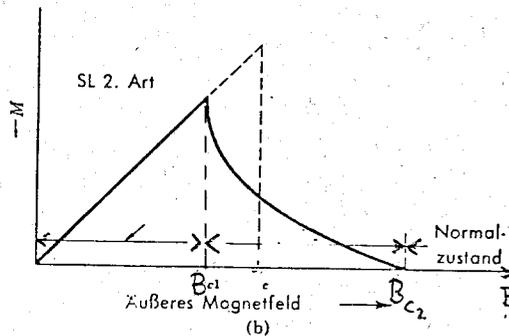
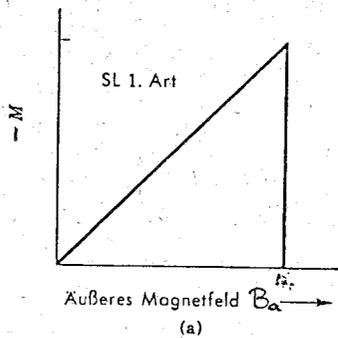
Innen:  $\vec{M} \neq 0$   $\vec{H}_i \neq 0$ ,  $\vec{B}_i = \mu_0(\vec{H}_i + \vec{M}) = 0$ . Aus  $\vec{M} = \chi \vec{H}$  folgt  $\chi = -1$

Oberfl:  $\vec{j}_{Ob} = 0$ , denn der Beitrag des tatsächlich vorhandenen Oberflächenstroms wird gerade von  $\vec{j}_{Mag} = \vec{M} \times \vec{n}$  erfasst

Außen:  $\vec{B}_a = \mu_0 \vec{H}_a = \vec{B}_{angelegt} + \vec{B}_{Probe}$  (als Folge von  $\vec{M}$ )

(Diese vereinfachte Beschreibungsweise behandelt den Supraleiter als permeables Medium mit  $\vec{M} = \chi \vec{H}$ ,  $\chi = -1$ ,  $\vec{j}_{Ob} = \vec{M} \times \vec{n}$ . Damit werden aber nur die magnetischen Eigenschaften richtig erfasst, nicht jedoch die Eigenschaft Widerstand=0.

Sofern der Entmagnetisierungsfaktor  $N = 0$  ist (d.h. die Geometrieeffekte keine Rolle spielen) verhält sich ein Supraleiter wie ein idealer Diamagnet :  $\chi = -1$ ,  $\vec{M} = -\vec{H}$   
 Beim Überschreiten eines kritischen Magnetfeldes  $\vec{B}_c = \vec{B}_c(T)$  "springt" der Körper jedoch vom Supra- in den Normalleitenden Zustand. Neben diesen "Typ I Supraleitern" (meist reine Metalle) gibt es jedoch auch sogenannte "Typ II-Supraleiter" (Legierungen), deren Magnetisierungskurve anders aussieht:



$B < B_{c1}$ :  
 Feld wird völlig verdrängt  
 $B_{c1} < B < B_{c2}$   
 Feld dringt teilweise in den SL ein.

Einige Zahlenwerte : (Werte für  $B_c$  beziehen sich auf  $T=0$ ).

	$T_c / ^\circ K$	$B_{c1} / \text{Gauss}$	$B_{c2} / \text{Gauss}$
Al	1.2		100 (Typ I)
Pb	7.2		800 (Typ I)
Nb (rein)	9.2	100 - 200	3400
Nb <sub>3</sub> Sn	18	170	22 000
PbMo <sub>5</sub> S <sub>6</sub>			500 000 !

### §8 Energie und Energiestromdichte des Elektromagnetischen Felds

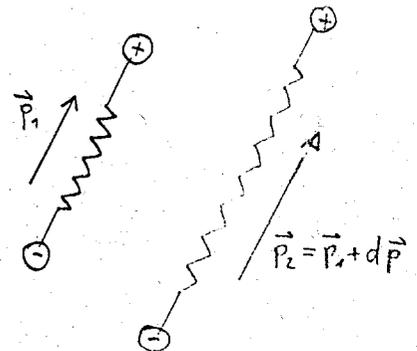
Wir rekapitulieren das in III.7 erhaltene Resultat über die mit einer Änderung  $dQ$  von Ladungen, und Änderungen  $dp$  von Dipolmomenten verknüpfte Energieänderung:

$$\delta W_{\text{Feld}} = \sum_{i=1}^N \phi(\vec{r}_i) dQ_i - \vec{E}(\vec{r}_i) d\vec{p}_i = \iiint \{ \rho(\vec{r}) \delta \phi(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) \delta \vec{P}(\vec{r}) \} dV$$

Diese Energie wird dem elektromagnetischen Feld entnommen ( $\delta W < 0$ ) bzw. zugeführt ( $\delta W > 0$ ). Der obige Ausdruck gilt nur für statische Felder! Mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen kann man den  $\delta W_{\text{Feld}}$  umschreiben:

$$\delta W_{\text{Feld}} = \delta \left( \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}) dV \right)$$

Die Aufteilung in der im Körper vorhandenen Ladungen in "freie" Ladungen  $Q_i$  und Dipole  $\vec{p}_i$  hängt aufs engste zusammen mit der begrifflichen Trennung der Systeme "Elektromagnetisches Feld" und "Materie". die erkennt man unmittelbar aus der folgenden Überlegung:  $-\vec{E}d\vec{p}$  gibt die mit einer Änderung von Dipolmomenten im vorgegebenen  $\vec{E}$ -Feld verknüpfte Energieänderung an,  $-\vec{E}d\vec{p}$  wird also dem elektromagnetischen Feld zugeführt bzw. entnommen. Aber auch für  $\vec{E}=0$  kostet die Erzeugung eines Dipols Energie, denn man muß die Abstände von Atomen in Molekülen ändern! Dies entspricht der mit einer Längenänderung einer Feder verknüpften Spannungsenergie. Diese Polarisationsenergie wird dem System "Materie" zugeführt bzw. entnommen. Die Änderung der Polarisation der Materie kommt also in zwei verschiedenen Energieformen vor, der des elektromagnetischen Felds,  $-\iiint \vec{E} \delta \vec{P} dV$ , und in der Polarisationsenergie des Körpers,  $\iiint \vec{J} \delta \vec{P} dV$ . Im thermodynamischen Gleichgewicht ist jedoch  $\vec{J} = \vec{E}$ .



Als Energieänderung des Gesamtsystems "Elektromagnetisches Feld Materie" erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{Feld}} + \delta W_{\text{Mat}} &= \iiint \phi(\vec{r}) \delta \rho(\vec{r}) dV = \delta \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 dV + \iiint \vec{E} \delta \vec{P} dV \\ &= \iiint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \{ \epsilon_0 \delta \vec{E} + \delta \vec{P} \} dV \\ &= \iiint \vec{E}(\vec{r}) \delta \vec{D}(\vec{r}) dV \end{aligned}$$

Im folgenden werden wir daher die Energie, die in der Wechselwirkung der die Dipole bildenden Ladungen <sup>steckt</sup> /den Körpern zurechnen, und nicht dem elektromagnetischen Feld.

Für den Fall eines statischen Magnetfelds erhalten wir entsprechend

$$\delta W_{\text{Feld}} = \sum_{i=1}^N \vec{j}(\vec{r}_i) d\vec{A}_i - \vec{H}(\vec{r}_i) d(\mu_0 \vec{M}_i) = \delta \left( \iiint \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2(\vec{r}) dV \right)$$

Allerdings ist nicht  $\vec{j}$  - wie man vermuten könnte - sondern das Vektorpotential  $\vec{A}$  die der Ladung  $Q$  entsprechende Größe. Wichtig ist auch, daß die Energieform "magnetische Energie" des elektromagnetischen Felds durch  $\vec{H}$ , und nicht durch  $\vec{B}$  bestimmt wird.

$$\delta W_{\text{Feld}} + \delta W_{\text{Mat}} = \sum_{i=1}^N \vec{j}(\vec{r}_i) d\vec{A}_i = \iiint (\mu_0 \vec{H} \delta \vec{H} + \vec{H} \mu_0 \delta \vec{M}) dV = \iiint \vec{H} \delta \vec{B} dV$$

Wir untersuchen nun zeitabhängige Felder. Für diese gelten die Energieausdrücke der Form  $\phi dQ$ ,  $\vec{j} d\vec{A}$  etc. nicht. Wir werden daher direkt von den Maxwell-Gleichungen für die Felder ausgehen und versuchen durch Umformungen den Erhaltungssatz der Energie von der Form

$$\text{div} \left\{ \begin{array}{l} \text{Energiestromdichte} \\ \text{des El. Mag. Felds} \end{array} \right\} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{array}{l} \text{Energiedichte} \\ \text{des Felds} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{dem Feld pro} \\ \text{Sek. zu (ab)-ge-} \\ \text{führte Energie} \end{array} \right\}$$

abzulesen.

Die auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Energiebeträge werden dem System "Materie" zugeführt bzw. entnommen.

$$1) \text{ div } \vec{D} = \rho(\vec{r}, t)$$

$$3) \text{ rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$2) \text{ rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$4) \text{ div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

Zauberformel:

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H}$$

multipliziere 2) mit  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} = - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

"

3) mit  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} = \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

subtrahiere:

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \equiv \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} = - \left\{ \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\}$$

Außerdem ist:  $\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) + \vec{E} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ ,  $\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) + \vec{H} \frac{\partial (\mu_0 \vec{M})}{\partial t}$

$$\text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) = - \left\{ \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{E} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial (\mu_0 \vec{M})}{\partial t} \right\}$$

Die linke Seite der Gleichung enthält nur Eigenschaften des Systems "Elektromagnetisches Feld", dessen Energie sich durch Strömen ändern kann - dann bleibt sie dem Feld erhalten - oder sie wird dem System "Materie" zugeführt bzw. entnommen, je nachdem die rechte Seite der Gleichung negativ oder positiv ist.

Energiestromdichte des el. mag. Felds  
(Poyntingvektor)

Energiedichte des el. mag. Felds

Joule' sche Wärme

Polarisationsleistung

Magnetisierungsleistung

Erhaltungssatz

Diese Beträge  
werden dem  
Feld entn.  
u. der Mat.  
zugeführt.

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\vec{H} \frac{\partial (\mu_0 \vec{M})}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{S} + \frac{\partial w(\vec{r}, t)}{\partial t} = - \left\{ \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{E} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial (\mu_0 \vec{M})}{\partial t} \right\}$$

Genau genommen stellt  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  die vom  $\vec{E}$ -Feld an den Strömen  $\vec{j}$  pro Sekunde geleistete Arbeit dar, welche nur für zeitlich konstante Felder  $\vec{E}, \vec{j}$  vollständig in Wärme übergeführt wird. Für zeitlich veränderliche Felder enthält  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  jedoch "Blindleistungsanteile"; entsprechend enthalten dann  $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ ,  $\vec{H} \cdot \frac{\partial (\mu_0 \vec{M})}{\partial t}$  dissipative Anteile.

Gilt speziell  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$  und  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$  mit reellen Konstanten  $\epsilon, \mu$ , so sind die zeitabhängigen Felder  $\vec{D}, \vec{E}$  und  $\vec{B}, \vec{H}$  zu jedem Zeitpunkt in Phase, d.h. die Energie von Feld und Materie ändert sich "in Phase" und es tritt daher keine Dissipation auf. (Vergl. mit erzwungener Schwingung). In diesem Fall kann man eine Energiedichte des kombinierten Systems "Elektromagnetisches Feld plus Materie" definieren:

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \omega_{F+M}(t), \quad \omega_{F+M}(t) = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Materie ohne Dissipation  
(bezgl. Pol. und Mag. Energie)  
Energiestromdichte

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Energiedichte von Feld+Materie

$$w_{FM}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Erhaltungssatz

$$\operatorname{div} \vec{S} + \frac{\partial w_{FM}}{\partial t} = - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Wir geben noch die integrale Formulierung des Erhaltungssatzes der Energie an

aus

$$\operatorname{div} \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\text{folgt: } - \frac{d}{dt} \iiint_V w_{FM}(\vec{r}, t) dV = \oint_V \vec{S} \cdot d\vec{F} + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$

$$\begin{array}{l} \text{Änderung der} \\ \text{Feldenergie} \end{array} = \begin{array}{l} \text{weggeströmte} \\ \text{Energie} \end{array} + \begin{array}{l} \text{erzeugte Joule} \\ \text{sche Wärme} \end{array}$$

Das elektromagnetische Feld transportiert nicht nur Energie, sondern auch Impuls und Drehimpuls. Die zu Ableitung dieser Größen notwendigen Überlegungen sind jedoch komplizierter, als für die Energie. Wir geben daher lediglich das Resultat an (siehe Becker-Sauter, Feynman lectures Vol. II)

Impulsdichte des elektromag. Felds

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H}$$

Drehimpulsdichte

$$\vec{\ell}(\vec{r}, t) = \vec{r} \times \vec{p}$$

## 11 Materialgleichungen für zeitabhängige Felder

### A. Drude-Modell

Zur Beschreibung der zeitabhängigen elektrischen Eigenschaften von Metallen nehmen wir vereinfachend an, daß sich die freien (Leitungs-)Elektronen gemäß den Newtonschen Gleichungen bewegen,

$$m \left( \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} \right) \mathbf{r}(t) = -e\mathbf{E}(t),$$

und vernachlässigen die Ortsabhängigkeit von  $\mathbf{E}$ , sowie das Magnetfeld.  $\tau$  ist eine phänomenologische Relaxationszeit.

- (a) Wir zählen die Elektronen als frei (d.h.  $\mathbf{P} = 0$  und  $\mathbf{M} = 0$ ). Mit  $\mathbf{j} = -en\dot{\mathbf{r}}$  ( $n =$  Elektronendichte) erhalten wir:

$$\left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \mathbf{j}_f(t) = \frac{ne^2}{m} \mathbf{E}(t)$$

Die Lösung dieser DGL. liefert die gesuchte Relation zwischen  $\mathbf{j}_f(t)$  und  $\mathbf{E}(t)$ .

Für ein Wechselfeld erhalten wir speziell:

$$\mathbf{E}(t) = \Re\{\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\}, \quad \mathbf{j}_f(t) = \Re\{\sigma(\omega)\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\}.$$

$\sigma(\omega)$  bezeichnet die (komplexe) Leitfähigkeit

$$\sigma(\omega) = \frac{\frac{ne^2}{m}\tau}{1 - i\omega\tau} = \sigma_1(\omega) + i\sigma_2(\omega).$$

Für beliebige zeitabhängige Felder gilt:

$$\mathbf{j}_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma(t-t')\mathbf{E}(t')dt',$$

$$\Sigma(t-t') = \frac{ne^2}{m} e^{-(t-t')/\tau} \Theta(t-t').$$

$\sigma(\omega)$  ist die Fourier-Transformierte von  $\Sigma(t-t')$ .

- (b) Alternativ können wir die Leitungselektronen auch unter die Polarisationsladungen mit  $\mathbf{P} = -ner$  zählen. Dann ist  $\mathbf{j}_f = 0$  (und  $\mathbf{M} = 0$ ),

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} \right) \mathbf{P}(t) = \frac{ne^2}{m} \mathbf{E}(t).$$

Für ein Wechselfeld gibt das:

$$\mathbf{P}(t) = \Re\{\epsilon_0\chi(\omega)\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\},$$

$$\chi(\omega) = \frac{-\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}{\omega(\omega + i/\tau)}, \quad \epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega).$$

In beiden Beschreibungsweisen ist der Gesamtstrom  $\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_{pol}$  gleich. Es gilt die folgende Umrechnungsvorschrift

$$\chi(\omega) \Big|_b = i \frac{\sigma(\omega)}{\epsilon_0 \omega} \Big|_a.$$

Ausnahme: Statische Felder ( $\omega = 0$ ).

Für schnell veränderliche Felder, wie z.B. im Bereich des sichtbaren Lichtes, sind die Oszillationsamplituden der Elektronen klein, und beide Beschreibungen sind physikalisch völlig ebenbürtig. In der Optik beschreibt man freie Elektronen üblicherweise durch eine (Drude-)Dielektrizitätsfunktion

$$\epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)}, \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0},$$

und damit als "gebundene" Polarisationsladungen! Die charakteristische Frequenz  $\omega_p$  heißt Plasma-Frequenz.

## B. Lorentz-Oszillatormodell

Gebundene Ladungen (wie z.B. in Atomen) kann man analog A. durch Hinzunahme einer "rücktreibenden" Kraft  $-cr$  mit der Federkonstanten  $c = m\omega_0^2$  als getriebenen Oszillator beschreiben ( $j_f = 0$  und  $M = 0$ ).

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \mathbf{P}(t) = \frac{ne^2}{m} \mathbf{E}(t).$$

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega(\omega + i/\tau)}, \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}.$$

Alternativ könnte man die gebundenen Elektronen direkt durch einen Strom  $j = \frac{dP}{dt}$  und damit durch eine Leitfähigkeit  $\sigma(\omega)$  erfassen.

Durch zeitliche Mittelung des Energie-Quelltermes  $\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$  über eine Periode erkennt man, daß die dissipierte Leistung durch den Imaginärteil von  $\omega\chi(\omega)$  bestimmt wird (bzw.  $\mathbf{jE}$  und  $\Re\{\sigma(\omega)\}$ ).

Den expliziten Zusammenhang von  $\mathbf{j}(t)$  bzw.  $\mathbf{P}(t)$  mit  $\mathbf{E}(t)$  erhält man wiederum durch Lösen der DGL. (Ein anderer Weg wäre über Fourier-Rücktransformation von  $P(\omega) = \epsilon_0\chi(\omega)E(\omega)$ ). Vorteilhaft ist es zunächst die "Antwort" auf eine Delta-Impuls Anregung zu betrachten:

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) P(t) = \frac{ne^2}{m} \delta(t - t'),$$

$$P(t) = \epsilon_0\chi(t - t') = \frac{ne^2}{m\Omega} e^{-\frac{t-t'}{2\tau}} \sin[\Omega(t - t')] \Theta(t - t'),$$

mit  $\Omega^2 = \omega_0^2 - (1/2\tau)^2$ . Als Randbedingung hatten wir  $P(\pm\infty) = 0$  benutzt.

Die Reaktion auf ein beliebiges Feld erhalten wir wieder durch Superposition

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t') \delta(t - t') dt',$$

$$P(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - t') E(t') dt'.$$

Die Integralbildung nennt man Faltung von  $\chi(t)$  mit  $E(t)$ . Der Grund, warum  $\chi(t - t')$  nur von der Zeitdifferenz abhängt ist die Homogenität der Zeit.  $\Theta(t - t')$  beinhaltet die Kausalität, d.h.  $P(t)$  hängt nur von vergangenen Feldstärkewerten ab.

Analoge mathematische Strukturen treten in vielen unterschiedlichen Bereichen von Physik und Technik auf, z.B. elektrische Netzwerke, Fourier-Optik ("System-Theorie").

In der Mathematik nennt man die Funktionen  $\Sigma(t - t')$ ,  $\chi(t - t')$  die Green-Funktionen der zugehörigen (inhomogenen) DGLs. (siehe Kap I.4) (Abgesehen von Vorfaktoren auf den rechten Seiten der DGLs vor  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ).

Kap. VII Kovariante Formulierung der Elektrodynamik§1 Der Raum-Zeit Begriff und die Lorentztransformation

Um die in der Natur ablaufenden Prozesse beschreiben zu können ist ein Bezugssystem notwendig:

Bezugssystem:

Koordinatensystem zur Bestimmung der räumlichen Lage der Teilchen zusammen mit einer dem System verbundenen Uhr. Die Angabe von  $(t, \vec{r})$  heißt Ereignis oder Weltpunkt.

Inertialsystem:

Bezugssystem, in dem ein sich frei bewegender Körper (d.h. auf den keine äußeren Kräfte wirken) konstante Geschwindigkeit besitzt. Wenn zwei Bezugssysteme von denen eines ein Inertialsystem ist, sich relativ zueinander mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen, so ist offensichtlich das andere Bezugssystem auch ein Inertialsystem.

Relativitätsprinzip:

Die Naturgesetze gelten in jedem Inertialsystem in der selben Form.

Galilei'sches Relativitätsprinzip:

Relativitätsprinzip zusammen mit der Annahme einer augenblicklichen Ausbreitung von Wirkung (d.h. Kräfte hängen nur von der Lage der Teilchen zum gegebenen Zeitpunkt ab. Eine Änderung der Lage irgendeines Teilchens wirkt im gleichen Augenblick auf die anderen Teilchen).

Transformation vom Inertialsystem K nach K' :  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$   
(Galilei-Transformation)  $t' = t$

$\vec{V}$  ist die Geschwindigkeit mit der K' gegen K bewegt wird.

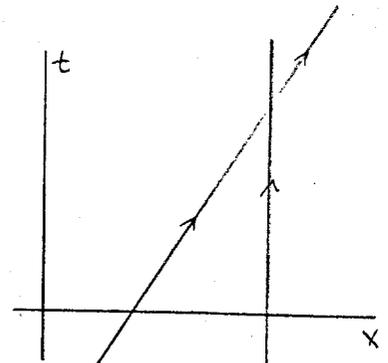
Einstein'sches Relativitätsprinzip:

Relativitätsprinzip zusammen mit der Annahme, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit für Wirkung (d.h. Energie, Impuls) gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Diese hat dann in jedem Inertialsystem den selben Wert !

Die Transformationsformeln von K nach K' wollen wir im folgenden ableiten. Das Relativitätsprinzip von Einstein führt dabei u.a. zu dem Ergebnis, daß die Zeit nicht mehr als absolut anzusehen ist.

Abstand zweier Ereignisse:

Wir führen einen fiktiven 4-dimensionalen Raum ein, dessen Koordinate  $x_0 = ct$  bis auf den Faktor  $c$  gleich der Zeit ist und  $(x_1, x_2, x_3) = \vec{r}$ . In diesem Raum ist ein Ereignis ein Punkt, jedem Teilchen entspricht eine Linie (Weltlinie)



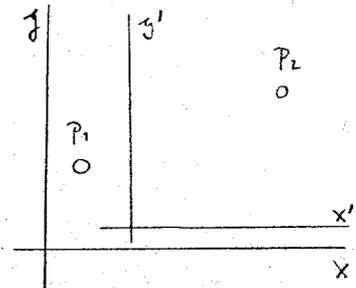
gleichförmig ruhendes  
bew. Teilchen | Teilchen

Wir formulieren das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mathematisch. Dazu betrachten wir zwei Inertialsysteme  $K$  und  $K'$  die sich relativ zueinander mit der konstanten Geschwindigkeit  $V$  bewegen.

$$\text{in } K : s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

$$\text{in } K' : s_{12}'^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2$$

$S_{12}$  heißt 4-er Abstand der Ereignisse 1 und 2.



$$\text{Infinitesimale Abstände: } ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$\text{oder: } ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wobei über doppelt auftretende Indices  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  zu summieren ist.  $g_{\mu\nu}$  heißt metrischer Fundamentaltensor (Minkowski-Metrik).  $x_0 = ct$ .

Oben wurde gezeigt: gilt  $ds^2 = 0$  in einem Inertialsystem, so gilt  $ds'^2 = 0$  in einem anderen Inertialsystem ebenfalls.

Wir beweisen nun, daß  $ds^2 = ds'^2$  in jedem Inertialsystem gilt.

Es muß gelten  $ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2$  da  $ds_1, ds_2$  von der selben Ordnung sind.  $a(V_{12})$  kann nur vom Absolutwert der Relativgeschwindigkeit abhängen. (Homogenität der Zeit bzw. Isotropie des Raumes). Wir betrachten die Inertialsysteme  $K, K_1, K_2$ .

$$ds^2 = a(V_1) ds_1^2 \text{ und } ds^2 = a(V_2) ds_2^2. \text{ Aber auch } ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2$$

$$\text{hieraus folgt: } a(V_{12}) = a(V_2) / a(V_1)$$

$V_{12}$  hängt aber neben  $V_1$  und  $V_2$  auch vom Winkel zwischen  $\vec{V}_1$  und  $\vec{V}_2$  ab. Letzterer geht jedoch in den Quotienten  $a(V_2) / a(V_1)$  nicht ein.

Daher muß  $a(V) = \text{const} = 1$  sein.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

$$ds^2 = ds'^2 \quad \text{bzw.} \quad s = s'$$

(Konstanz des 4er-Abstands).

Zeitartige Abstände  $S_{12}^2 > 0$ 

Sind zwei Ereignisse 1 und 2 in einem System K zeitartig, so kann man ein System K' finden, an dem beide Ereignisse am selben Raumpunkt stattfinden.  $l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ ;  $t_{21} = t_2 - t_1$

$$l_{12}' = 0 \quad \text{wenn gilt} \quad S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 \geq 0$$

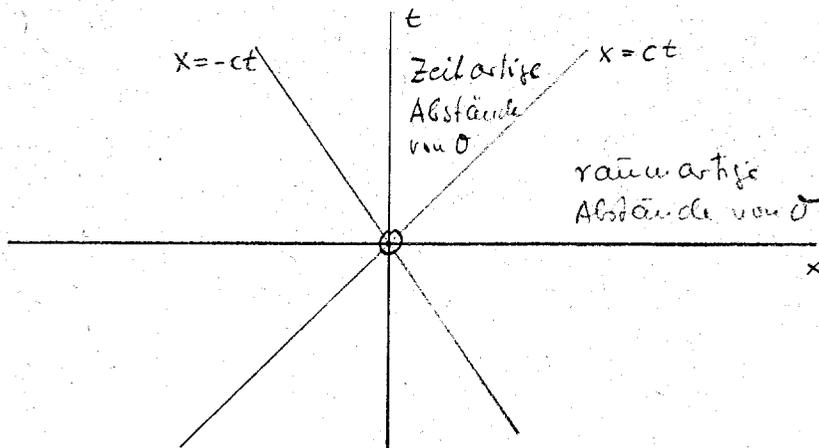
$$\text{Zeitdifferenz in K'} \quad t_{12}' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = S_{12}/c$$

Raumartige Abstände  $S_{12}^2 < 0$ 

Sind zwei Ereignisse in K raumartig, so gilt es ein Bezugssystem K' in dem beide Ereignisse gleichzeitig sind. Die (3 dim) Entfernung, in dem die Ereignisse stattfinden ist in K':

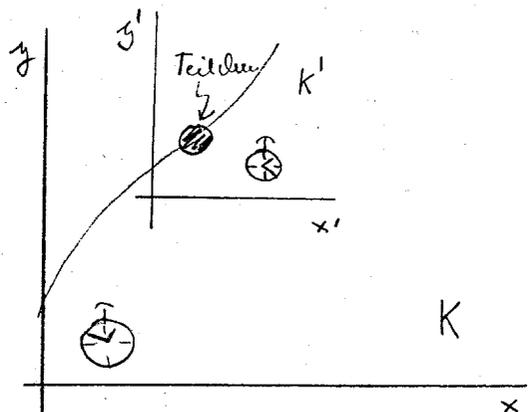
$$l_{12}' = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = i S_{12}$$

Da der 4er Abstand  $S_{12}$  eine Invariante ist, ist die Unterteilung von Abständen in zeitartige und raumartige von absoluter Bedeutung.

Eigenzeit eines Teilchens oder Beobachters

Diejenige Zeit, welche von einer Uhr angezeigt wird, welche sich mit irgendeinem Gegenstand mitbewegt.

Der Gegenstand kann sich beliebig bewegen. In jedem Moment gibt es dann ein mit der Uhr fest verbundenes Koordinatensystem K' das (zusammen mit der Uhr) ein Inertialsystem darstellt.



$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 \quad \approx \quad dt' = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2}$$

$d\vec{r}/dt = v$  Geschwindigkeit des Teilchens (im System K gemessen)

Zeitdifferenz, das die bewegte Uhr anzeigt,

wenn auf der unbewegten Uhr die Zeit  $t_2 - t_1$  vergeht.

$$t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

Da  $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$  ist, geht eine bewegte Uhr langsamer als eine unbewegte.

### Lorentz-Transformation

Transformation der Koordinaten  $t, r$  eines Ereignisses im Inertialsystem  $K$  in die Koordinaten  $t', r'$  desselben Ereignisses in  $K'$ .

Diese Transformation läßt den 4er Abstand zweier Ereignisse invariant.

Wir betrachten speziell den Fall, daß sich  $K'$  relativ zu  $K$  mit der Geschwindigkeit  $V$  längs der  $x$ -Achse bewegt.

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} & y' &= y, \quad z' = z \\ t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \beta &= V/c < 1 \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} & y &= y', \quad z = z' \\ t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right.$$

(spezielle Lorentztransformation)

Alle Transformationen mit der Eigenschaft, daß eine kräftefreie Bewegung (d.h. eine Gerade im  $t$ - $r$  Raum) wieder in eine solche übergeht, und die quadratische Form  $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$  ungeändert läßt, können

durch Hintereinander ausführen von einer

a) räumlichen Dehnung des Koord. Systems

b) und der speziellen Lorentztransformation

aufgebaut werden.

Es sei noch auf eine allgemeine Eigenschaft der speziellen (natürlich auch der allg.) Lorentztransformation hingewiesen, die sie von den Galilei-Transformationen unterscheidet: Galilei-Transformationen sind kommutativ während das Ergebnis von zwei aufeinanderfolgenden (speziellen) Lorentztransformationen von ihrer Reihenfolge abhängt.

## § 2 Vierervektoren, Vierertensoren und Vektoroperationen

Wie im dreidim. Raum die Vektor und Tensorrechnung das geeignete Hilfsmittel ist, um Gleichungen in gegenüber räumlichen Drehungen invarianter Form zu schreiben, so ist auch eine entsprechende vierdimensionale Vektor und Tensorrechnung nützlich, um physikalische Gleichungen in Lorentz-invarianter Form darzustellen sog. kovariante Formulierung. Man sieht außerdem jeder physikalischen Größe ihren Charakter sofort an und wie sie sich von einem in ein anderes Bezugssystem transformiert.  $A_i \hat{=} (A_1, A_2, A_3, A_4)$ ;  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$   
 Ein Vierervektor  $A_\mu$  transformiert sich wie:

$$A_1 = \frac{A_1' - i\beta A_4'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad A_2 = A_2'; \quad A_3 = A_3'; \quad A_4 = \frac{A_4' + i\beta A_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$-ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (\text{Pseudo-euklidischer Raum})$$

oder:  $A_i = \alpha_{ik} A_k'$  mit  $\alpha_{ik}(V) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{-\beta i}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

$\beta = V/c$

4-er Tensor:

$$T_{ik} = \alpha_{im} \alpha_{kl} T_{m'l'}$$

Beispiele zu 4-er Vektoren:

4-er Impuls:  $p_i \hat{=} (\vec{p}, i\frac{E}{c})$  mit  $E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (c p)^2}$

z.B. ruhendes Teilchen in  $K'$  hat  $p_4' = m_0 c, p_1' = p_2' = p_3' = 0$

in  $K$ :

$$E = p_4 c = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2; \quad p_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} V, \quad p_2 = p_3 = 0$$

4-er Geschwindigkeit:

Der gewöhnliche 3-dimensionale Geschwindigkeitsvektor läßt sich zu einem 4er Vektor erweitern:  $u_i = dx_i/ds$ . Es muß  $ds$  statt  $dt$  stehen, denn  $dt$  ist keine Invariante:  $ds = c dt \sqrt{1-\beta^2}$  wobei  $ds/c$  die Eigenzeit des bewegten Teilchens ist.

Vierergeschwindigkeit  $u_k = \frac{dx_k}{ds} \hat{=} \left( \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$

Viererbeschleunigung  $b_k = \frac{du_k}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{du_k}{dt}$

Viererkraft  $f_k = \frac{dp_k}{ds} = mc \frac{du_k}{ds} \hat{=} \left( \frac{\vec{f}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{i\vec{f} \cdot \vec{v}}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$

Viererstromdichte  $j_k \hat{=} (\vec{j}, i s \cdot c)$

Viererpotential  $A_k \hat{=} (\vec{A}, i\phi/c)$  (siehe Darst. von  $\phi, \vec{A}$ )

Vierergradient  $\nabla_k \hat{=} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right)$ ;  $A_k = \nabla_k \phi = 4\text{-er Vek}$

Viererdivergenz  $\nabla_k A_k$  ist ein 4er Skalar

Beispiel:  $\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \iff \nabla_k j_k = 0$

D' Alembert Operator  $\square = \nabla_k \nabla_k = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Beispiel:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \mu_0 \vec{j} \\ \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{aligned} \right\} \square A_k = \mu_0 j_k$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0 \quad \nabla_k A_k = 0$$

Skalarprodukt zweier Vektoren:  $A_k B_k = \text{Invariante (=Skalar)}$

Beispiele:  $P_k P_k = -(m_0 c)^2$

$$u_k u_k = -1$$

$$u_k b_k = 0$$

### § 3 Viererpotential und Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung

Ruhesystem:  $\phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'}$ ,  $\vec{A}' = 0$

Da  $A_\mu$  ein Vierervektor ist, können wir  $A'_\mu$  in einem bewegten Bezugssystem direkt über die Lorentztransformation erhalten.

$$\phi(x,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{q}{\left\{ \left[ \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \right]^2 + y^2 + z^2 \right\}^{1/2}}$$

$$A_x(x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{q \cdot v}{\left\{ \left[ \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \right]^2 + y^2 + z^2 \right\}^{1/2}} \quad A_y = A_z = 0$$

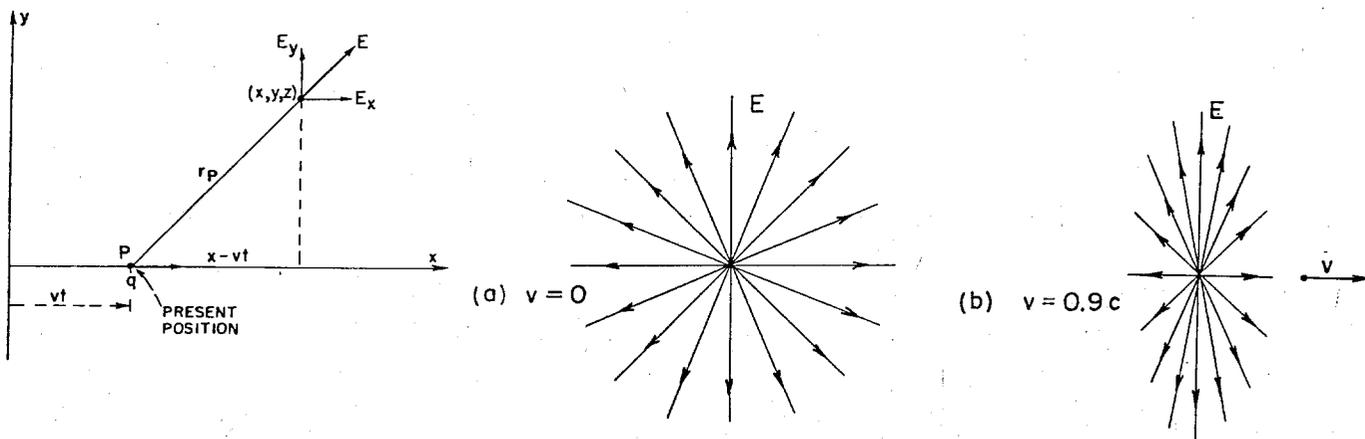
Hieraus bestimmen wir die Felder:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{x-vt}{\left\{ \left[ \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \right]^2 + y^2 + z^2 \right\}^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{y}{\left\{ \dots \right\}^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{z}{\left\{ \dots \right\}^{3/2}}$$

und  $\vec{B} = \frac{v}{c^2} \times \vec{E}$



Das Magnetfeld einer langsam bewegten Ladung ( $v \ll c$ ) ergibt sich als

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} \quad \text{mit} \quad \vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \left( \frac{\vec{R}}{R} \right) \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$\vec{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v} \times \vec{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(q\vec{v}) \times \vec{R}}{R^3}$$

Dieses Resultat stimmt exakt mit dem Biot-Savart'schen Gesetz überein.

#### § 4 Die Feldgleichungen

Die Umschreibung der Maxwellgleichung in eine kovariante Form bringt zwei Vorteile mit sich: Erstens erhalten sie rein formal gegenüber der 3-dimensionalen Schreibweise eine sehr vereinfachte und vor allem durch ihre Symmetrie sehr bemerkenswerte Darstellung. Zweitens, und ist dies für uns von besonderer Wichtigkeit, ergibt sich physikalisch eine Reihe von besonderen Zusammenhängen zwischen einzelnen Größen der Maxwell'schen Theorie, wie z.B. zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke, Energie, Impuls usw.

Wir gehen nun von den Potentialen  $\phi, \vec{A}$  bzw.  $A_k$  zu den Feldstärken über

$$\vec{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi, \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

Komponentenweise ausgeschrieben lauten diese Gleichungen ( $A_0 = c\phi$ )

$$B_1 = B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = F_{23}$$

$$E_1 = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = ic \left\{ \frac{\partial A_y}{\partial x_2} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \right\} = ic F_{12}$$

$$B_2 = B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = F_{31}$$

$$E_2 = -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = ic \left\{ \frac{\partial A_z}{\partial x_3} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right\} = ic F_{23}$$

$$B_3 = B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = F_{12}$$

$$E_3 = -\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = ic \left\{ \frac{\partial A_z}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right\} = ic F_{31}$$

Die einheitliche Form dieser Gleichungen legt die Definition eines "elektromagnetischen Feldtensors  $F_{ik}$ " nahe

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c} E_x \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c} E_y \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c} E_z \\ \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also das Resultat, daß sich das elektromagnetische Feld in Viererschreibweise nicht mehr durch zwei Vektoren  $\vec{E}$  (polar), und  $\vec{B}$  (axial) beschreiben läßt, sondern durch einen antisymmetrischen Tensor  $F_{ik}$  zweiter Stufe.

Die elektrische und magnetische Feldstärke sind nicht mehr unabhängig voneinander, sondern zu einer Einheit zusammen gefaßt. Bei einer Lorentztransformation transformieren sich die Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nicht für sich, sondern gemischt.

Wir wählen jetzt wieder die spezielle Lorentztransformation d.h. parallele x-Achsen.





2) ist  $E^2/c^2 - B^2 > 0$  in  $K'$ , so läßt sich ein System  $K$  finden in dem  $B \equiv 0$  ist, d.h. man hat den magnet. Anteil des Felds "wegtransformiert".

Mit Hilfe des Feldtensors kann man die 4 Maxwellgleichungen in kovariante Form bringen. Es zeigt sich, daß je zwei von ihnen zu einer einzigen Vierergleichung verschmelzen.

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} \\ \text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \mu_0 j_i \\ \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (k=1,2,3) \\ (k=4) \end{array}$$

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ek}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ie}}{\partial x_k} = 0 \\ \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (k=1,2,3) \\ (k=4) \end{array}$$

Wegen der Antisymmetrie von  $F_{ik}$  treten <sup>in II</sup> nur Indices auf, bei denen  $i, k, l$  verschieden sind.

Obwohl die Maxwell-Gleichungen in der zunächst verwendeten 3-dimensionalen Schreibweise recht symmetrisch in  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind, besteht zwischen beiden Feldern bezüglich ihres Transformationsverhaltens ein fundamentaler Unterschied. Dies rührt von der Lorentzkraft her, die die (mathematischen) Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  mit der Kraft  $\vec{F}$  auf ein geladenes Teilchen verknüpft.

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Da die Ladung  $q$  ein Skalar ist, und  $\vec{v}$  und  $\vec{F}$  Vektoren sind, ist

$\vec{E}$  ein (polarer) Vektor                       $\vec{B}$  ein (axialer) Vektor (Pseudovektor)

d. h.  $\vec{B}$  ändert bei Spiegelungen des Koordinatensystems am Nullpunkt seine Richtung. Dieses Transformationsverhalten ist explizit in  $F_{ik}$  enthalten.

Was wäre nun, wenn es magnetische Ladungen  $q_m$  gäbe? Die Maxwell-Gleichungen wären nun symmetrisch in  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ ; zur Lorentzkraft hätten wir Terme  $q_m \vec{B}$  und  $q_m \vec{v} \times \vec{E}$  hinzuzufügen. Die magnetische Ladung  $q_m$  hätte jedoch die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie bei Spiegelung des Koordinatensystems am Nullpunkt ihr Vorzeichen ändert!! Eine pseudoskalare physikalische Größe ist jedoch in der klassischen Physik bisher nirgends aufgetaucht - wohl aber in der Elementarteilchenphysik. Es ist daher nicht ausgeschlossen, daß es (bisher noch nicht entdeckte) Elementarteilchen gibt, die magnetische Ladungen tragen.

ANNALEN  
DER  
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH  
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 17.

DER GANZEN REIHE 322. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT FÜNF FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1905.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIVS BARTH.

**3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper;  
von A. Einstein.**

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium“ zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität“ genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

Voraussetzung einführen, daß sich das Licht im leeren Raume stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit  $V$  fortpflanze. Diese beiden Voraussetzungen genügen, um zu einer einfachen und widerspruchsfreien Elektrodynamik bewegter Körper zu gelangen unter Zugrundelegung der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper. Die Einführung eines „Lichtäthers“ wird sich insofern als überflüssig erweisen, als nach der zu entwickelnden Auffassung weder ein mit besonderen Eigenschaften ausgestatteter „absolut ruhender Raum“ eingeführt, noch einem Punkte des leeren Raumes, in welchem elektromagnetische Prozesse stattfinden, ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.

Die zu entwickelnde Theorie stützt sich — wie jede andere Elektrodynamik — auf die Kinematik des starren Körpers, da die Aussagen einer jeden Theorie Beziehungen zwischen starren Körpern (Koordinatensystemen), Uhren und elektromagnetischen Prozessen betreffen. Die nicht genügende Berücksichtigung dieses Umstandes ist die Wurzel der Schwierigkeiten, mit denen die Elektrodynamik bewegter Körper gegenwärtig zu kämpfen hat.

## I. Kinematischer Teil.

### § 1. Definition der Gleichzeitigkeit.

Es liege ein Koordinatensystem vor, in welchem die Newtonschen mechanischen Gleichungen gelten. Wir nennen dies Koordinatensystem zur sprachlichen Unterscheidung von später einzuführenden Koordinatensystemen und zur Präzisierung der Vorstellung das „ruhende System“.

Ruht ein materieller Punkt relativ zu diesem Koordinatensystem, so kann seine Lage relativ zu letzterem durch starre Maßstäbe unter Benutzung der Methoden der euklidischen Geometrie bestimmt und in kartesischen Koordinaten ausgedrückt werden.

Wollen wir die *Bewegung* eines materiellen Punktes beschreiben, so geben wir die Werte seiner Koordinaten in Funktion der Zeit. Es ist nun wohl im Auge zu behalten, daß eine derartige mathematische Beschreibung erst dann einen physikalischen Sinn hat, wenn man sich vorher darüber klar geworden ist, was hier unter „Zeit“ verstanden wird.

Wir haben zu berücksichtigen, daß alle unsere Urteile, in welchen die Zeit eine Rolle spielt, immer Urteile über *gleichzeitige Ereignisse* sind. Wenn ich z. B. sage: „Jener Zug kommt hier um 7 Uhr an,“ so heißt dies etwa: „Das Zeigen des kleinen Zeigers meiner Uhr auf 7 und das Ankommen des Zuges sind gleichzeitige Ereignisse.“<sup>1)</sup>

Es könnte scheinen, daß alle die Definition der „Zeit“ betreffenden Schwierigkeiten dadurch überwunden werden könnten, daß ich an Stelle der „Zeit“ die „Stellung des kleinen Zeigers meiner Uhr“ setze. Eine solche Definition genügt in der Tat, wenn es sich darum handelt, eine Zeit zu definieren ausschließlich für den Ort, an welchem sich die Uhr eben befindet; die Definition genügt aber nicht mehr, sobald es sich darum handelt, an verschiedenen Orten stattfindende Ereignisreihen miteinander zeitlich zu verknüpfen, oder — was auf dasselbe hinausläuft — Ereignisse zeitlich zu werten, welche in von der Uhr entfernten Orten stattfinden.

Wir könnten uns allerdings damit begnügen, die Ereignisse dadurch zeitlich zu werten, daß ein samt der Uhr im Koordinatenursprung befindlicher Beobachter jedem von einem zu wertenden Ereignis Zeugnis gebenden, durch den leeren Raum zu ihm gelangenden Lichtzeichen die entsprechende Uhrzeigerstellung zuordnet. Eine solche Zuordnung bringt aber den Übelstand mit sich, daß sie vom Standpunkte des mit der Uhr versehenen Beobachters nicht unabhängig ist, wie wir durch die Erfahrung wissen. Zu einer weit praktischeren Festsetzung gelangen wir durch folgende Betrachtung.

Befindet sich im Punkte  $A$  des Raumes eine Uhr, so kann ein in  $A$  befindlicher Beobachter die Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von  $A$  zeitlich werten durch Aufsuchen der mit diesen Ereignissen gleichzeitigen Uhrzeigerstellungen. Befindet sich auch im Punkte  $B$  des Raumes eine Uhr — wir wollen hinzufügen, „eine Uhr von genau derselben Beschaffenheit wie die in  $A$  befindliche“ — so ist auch eine zeitliche Wertung der Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von

1) Die Ungenauigkeit, welche in dem Begriffe der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an (annähernd) demselben Orte steckt und gleichfalls durch eine Abstraktion überbrückt werden muß, soll hier nicht erörtert werden.