Mitschrieb zu Theoretische Physik B: Analytische Mechanik

Prof. Dr. Ralph von Baltz, Dr. Jan Brinkmann

Vorlesung Sommersemester 2002

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 21. Februar 2004
Thanx to Hjalmar Peters für die Verbesserungsvorschläge

Mitschrieb der Vorlesung Theoretische Physik B
von Herrn Prof. Dr. Baltz im Sommersemester 2002
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1 (Prinzipien der) Mechanik **5**
- 1.1 Einleitung . . . 5
- 1.2 Bezugssysteme und Relativitätsprinzip . . . 6
  - 1.2.1 Klasse von Inertialsystemen . . . 6
  - 1.2.2 Relativitätsprinzip . . . 7
  - 1.2.3 Exkursion: Lorentz-Kraft . . . 7
  - 1.2.4 Einstein'sches Relativitätsprinzip . . . 7
- 1.3 Lagrange-Mechanik . . . 8
  - 1.3.1 Lagrange-Gleichung 1.Art . . . 9
- 1.4 Lagrange-Gleichung 2.Art . . . 10
  - 1.4.1 Wirkungsprinzip und Bewegungsgleichungen . . . 11
  - 1.4.2 Mathematischer Einschub: Extremalproblem . . . 16
  - 1.4.3 Extremalaufgabe mit Nebenbedingung . . . 20
- 1.5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen . . . 24

2 Zweikörper-System mit zentraler Wechselwirkung **27**
- 2.1 Energie des relativen Systems . . . 31
- 2.2 Lösung der Radialgleichungen . . . 32
- 2.3 Keplerproblem . . . 32

3 Hamiltonsche Formulierung der Mechanik **35**
- 3.1 Integrale der Bewegung von Teilchen im Zentralfeld . . . 38
- 3.2 „Blick über den Zaun“: Bedeutung von $\vec{A}$ und ϕ . . . 41

4 Gekoppelte Oszillatoren **43**
- 4.1 Feder-Modell . . . 44
  - 4.1.1 Matrix-Bezeichnung . . . 45
  - 4.1.2 Charakteristisches Polynom . . . 46
  - 4.1.3 Mathematische Eigenschaften des Eigenwertproblems . . . 47

5 Bewegungen des starren Körpers **53**
- 5.1 Winkelgeschwindigkeit, Freiheitsgrade . . . 53
- 5.2 Energie . . . 55
- 5.3 Mathematischer Einschub: Mehrfachintegrale . . . 58
  - 5.3.1 Flächenintegral . . . 58
  - 5.3.2 Volumenintegral . . . 59
- 5.4 Trägheitsmoment eines Würfels . . . 59
- 5.5 Bewegungsgleichungen des (freien) starren Körpers . . . 60
- 5.6 Mathematischer Einschub: Skalare, Vektoren, Tensoren . . . 62
- 5.7 Harmonischer Oszillator als Lineares System . . . 64
- 5.8 Dynamische Systeme, Klassifikation der Bahnen im Phasenraum . . . 67
  - 5.8.1 2 gekoppelte Oszillatoren $n = 4$ . . . 68

Kapitel 1

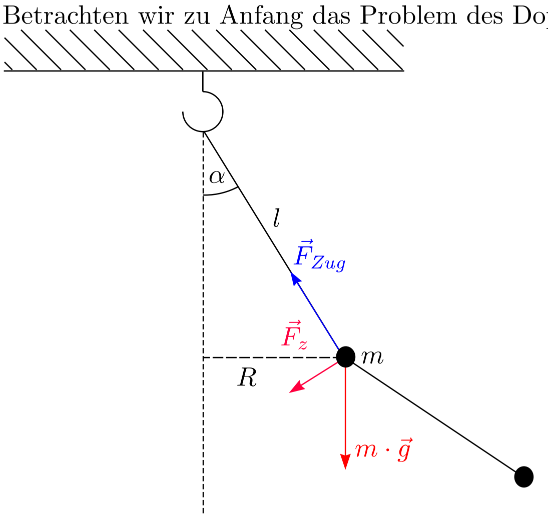
(Prinzipien der) Mechanik

1.1 Einleitung

Mechanik hat Vorbildfunktion für Aufbau der gesamten (theoretischen) Physik

- Mechanische Systeme einfacher als beispielsweise in der Elektrodynamik, Atomphysik
- Klassische Mechanik $\xrightarrow{\text{Korrespondenzprinzip}}$ Quantenmechanik
- Prinzipien: Allgemeine Regeln
- „Eigennutz“: Systeme mit Zwangsbedingungen

Betrachten wir zu Anfang das Problem des Doppelpendels:



Die Bewegung ist eingeschränkt durch:

$x^2 + y^2 - l^2 = 0$

Es gilt folgende Bewegungsgleichung:

$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$

Für ein Doppelpendel haben wir die beiden Größen φ_1 und φ_2.

Ziel:

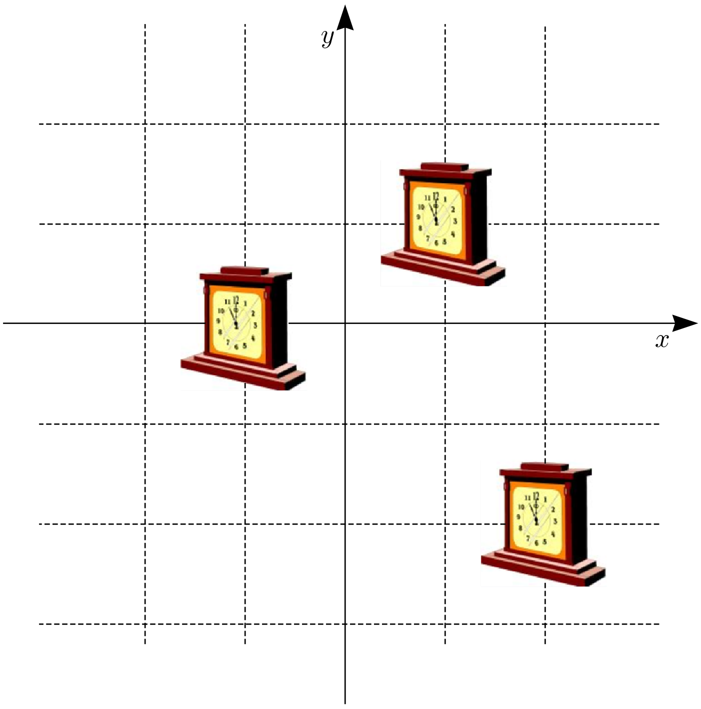
{Zwangsbedingungen} $\Rightarrow$ {Zwangskräfte} $\Rightarrow$ {Lagrange-Gleichungen 1./2. Art} $\Rightarrow$ {Wirkungsprinzip}

Bewegungsgleichung:

$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}}$

1.2 Bezugssysteme und Relativitätsprinzip

Bezugssystem: „Koordinatensystem+Uhren“



Ein Koordinatensystem ist ein starres Gerüst von Maßstäben.

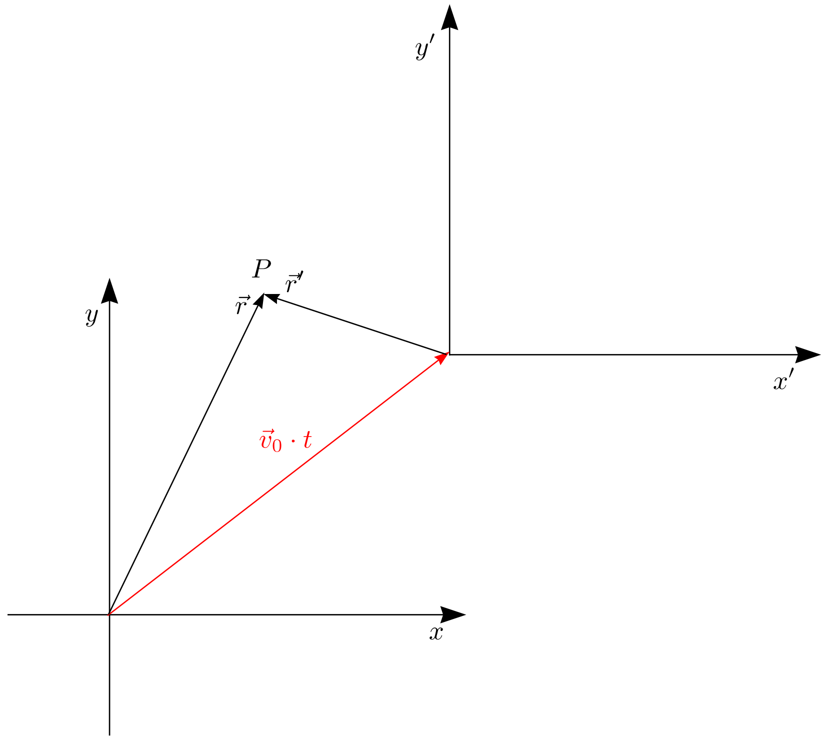
Inertial-System:

Wir nehmen an, daß ein kräftefreies Teilchen eine konstante Geschwindigkeit hat, also $\vec{v}$=const. gilt. Wenn dies nicht gilt, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Es ist doch eine Kraft vorhanden.
2. Das System ist nicht inertial.

1.2.1 Klasse von Inertialsystemen

K sei Inertialsystem. Dann auch K' mit:



$\boxed{\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 \cdot t + \vec{R}_0}$

$\boxed{t' = t \text{ (absolute Zeit)}}$

$\vec{R}_0, \vec{v}_0 = \text{const.}$

Hierbei handelt es sich um die sogenannte Galilei-Transformation.

1.2.2 Relativitätsprinzip

Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form. Beispielsweise lautet die Beziehung zwischen Energie und Geschwindigkeit für ein freies Teilchen:

$E = \frac{m}{2}\vec{v}^2 \leftrightarrow E' = \frac{m}{2}\vec{v}'^2$

Bewegungsgleichung: $\underbrace{m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(\vec{r})}_{\text{invariant gegen Galilei}}$

1.2.3 Exkursion: Lorentz-Kraft

$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$

1.2.4 Einstein'sches Relativitätsprinzip

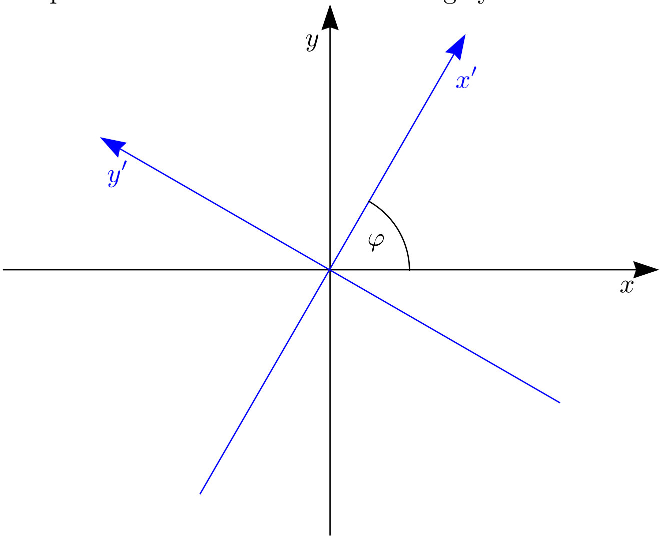
Relativitätsprinzip plus Annahme, daß Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich (Galilei $\Rightarrow$ Lorentztransformation)

Nichtinertiale Bezugssysteme

$m\ddot{\vec{r}} \neq \vec{F}$ (=Kraft aus Inertialsystem)

$m\ddot{\vec{r}} \stackrel{!}{=} \vec{F}_{ges} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{schein}$

Beispielsweise ist ein rotierendes Bezugssystem nicht inertial.



$\varphi = \Omega \cdot t$

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}_{grav} + \underbrace{m \cdot \vec{\Omega} \times \left(\vec{r} \times \vec{\Omega}\right)}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \underbrace{2m\vec{v} \times \vec{\Omega}}_{\text{Corioliskraft}} + \underbrace{m\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}}}_{?}}$$

<u>**Äquivalenzprinzip:**</u>

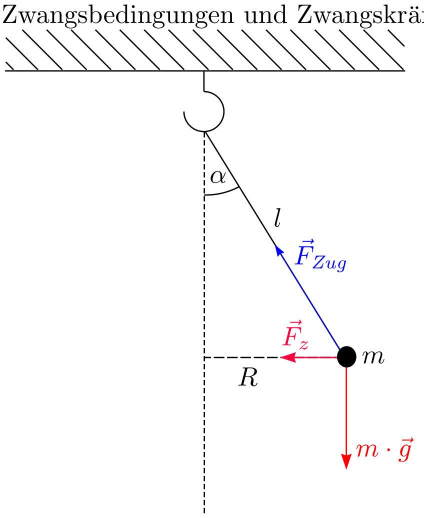
Gravitationsfeld $\hat{=}$ beschleunigtes Bezugssystem

LOKAL

1.3 Lagrange-Mechanik

<u>Ziele:</u> Zwangsbedingungen $\Rightarrow$ Lagrange-Funktion

- Zwangsbedingungen und Zwangskräfte



$g(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$

Newton:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{ges} = \vec{F}_{Gr} + \vec{F}_{Zw}}$$

$\vec{F}_Z$ist eine Zwangskraft, die für $g(x, y) = 0$ gilt. Die Zwangskraft $\vec{F}_Z$ steht senkrecht auf $g(\vec{r}, t) = 0$. Also gilt:

$$\boxed{\vec{F}_Z = \lambda \cdot \text{grad } g(\vec{r}, t)}$$

Für unser Pendel erhalten wir:

$g = x^2 + y^2 - l^2$

grad $g = (2x, 2y, 0)$

λ ist der Lagrange-Parameter. Damit gilt für N Teilchen ($j = 1, 2, \ldots, N$) und R Zwangsbedingungen $g_\alpha(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$ die Lagrange-Gleichung 1.Art.

1.3.1 Lagrange-Gleichung 1.Art

$$\boxed{m \cdot \ddot{\vec{r}}_j(t) = \vec{F}_{phys} + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \cdot \text{grad } g_\alpha(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) \text{ mit } g_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0}$$

Es handelt sich um $3N + R$ Gleichungen für $\vec{r}_j(t)$, $\lambda_\alpha(t)$.

Beispiel: Mathematisches Pendel

1.) $m\ddot{x} = 0 + \lambda(t) \cdot 2x$
2.) $m\ddot{y} = -mg + \lambda(t) \cdot 2y$
3.) $x^2 + y^2 - l^2 = 0$

Diese Differentialgleichungen sind leider nicht analytisch zu lösen. Es wäre besser, sogenannte generalisierte Koordinaten einzuführen:

$q_k, k = 1, 2, \ldots, 3N - R = f$

f ist die Zahl der Freiheitsgrade.

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N = x = \{x_j\}$ für $j = 1, 2, \ldots, 3N$

$x_j = x_j(q_1, q_2, \ldots, q_f, t)$

Für das mathematische Pendel gilt:

$x_1 \equiv x = l \cdot \sin\varphi$

$x_2 \equiv y = l \cdot \cos\varphi$

Generalisierte Koordinate: $q \equiv \varphi$

Die Zwangsbedingung ist identisch erfüllt:

$g(x, y) = \underbrace{x^2 + y^2 - l^2}_{\equiv 0} = 0$

Strategie:

Wähle q_k so, daß die Zwangsbedingungen identisch erfüllt sind, d.h., daß die q_k unabhängig voneinander sind. Die Lagrangegleichungen werden so umgeformt, daß sie besser handhabbar sind. Man will also die Zwangskräfte „loswerden"!

$$m\ddot{x}_j(t) = F_j + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha(x,t)}{\partial x_j}$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $\frac{\partial x_j(q,t)}{\partial q_k}$ und bilden $\sum\limits_{j=1}^{3N}$.

$$\sum m\ddot{x}_j \frac{\partial x_j(q,t)}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{3N} F_j \frac{\partial x_j(q,t)}{\partial q_k} + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \sum_{j=1}^{3N} \underbrace{\frac{\partial g_\alpha(x,t)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j(q,t)}{\partial q_k}}_{\substack{\frac{\partial}{\partial q_k} g_\alpha(x_1(q_1,\ldots,q_l,t), \\ x_2(q_1,\ldots,q_l,t),\ldots)}}$$

Sofern die Zwangsbedingungen identisch erfüllt sind, gilt:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} g_\alpha \left(x_1(q_1,\ldots,q_l,t), x_2(q_1,\ldots,q_l,t),\ldots\right) \equiv 0$$

$\frac{\partial g_\alpha(x,t)}{\partial x_j}$ zeigt in Richtung der Zwangskraft und ist senkrecht zur q_k-Koordinatenlinie. Projektion auf die Tangential-Fläche der Nebenbedingung (genauer: auf die q_k-Koordinatenlinie)

1.4 Lagrange-Gleichung 2.Art

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3N} m\ddot{x}_j \frac{\partial x_j(q,t)}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{3N} F_j \frac{\partial x_j(q,t)}{\partial q_k}}$$

Beispiel:

Generalisierte Koordinate: $q \equiv \varphi$ (nur $k = 1$)

$x_1 \equiv x, \frac{\partial x}{\partial \varphi} = l \cdot \cos\varphi$

$x_2 \equiv y, \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -l \cdot \sin\varphi$

$j = 1, 2$

$m\ddot{x}\,(l \cdot \cos\varphi) + m\ddot{y}\,(-l\sin\varphi) = 0 \cdot (\ldots) + mg\,(-l\sin\varphi)$

$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} l \cdot \sin\varphi(t) = l \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$

$\ddot{x}(t) = -l \cdot (\sin\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cdot (\cos\varphi) \cdot \ddot{\varphi}$

$\dot{y}(t) = -l \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$

$\ddot{y}(t) = -l \cdot (\cos\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 - l \cdot (\sin\varphi) \cdot \ddot{\varphi}$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt:

$ml^2\ddot{\varphi} = -mlg\sin\varphi$

Die Masse fällt heraus, da schwere und träge Masse gleich sind.

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$

Wie geht die Reise weiter (WARUM überhaupt?)

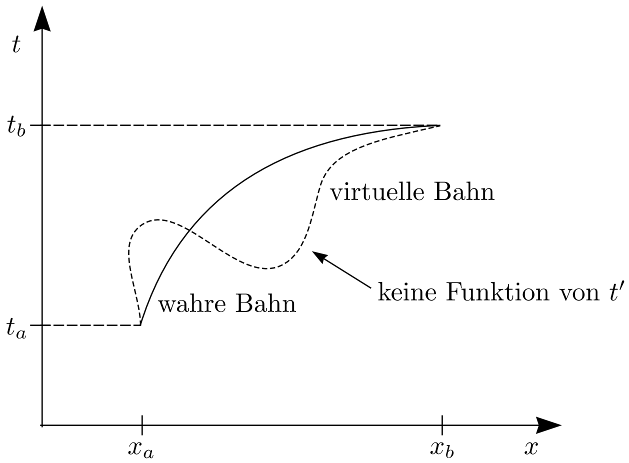
Die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ genügt der Differentialgleichung:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}(q, v, t)}{\partial v}\bigg|_{v=\dot{q}(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}}$$

Nach dem Standard-Modell gilt:

$$\boxed{\mathcal{L} = E_{kin} - E_{pot}}$$

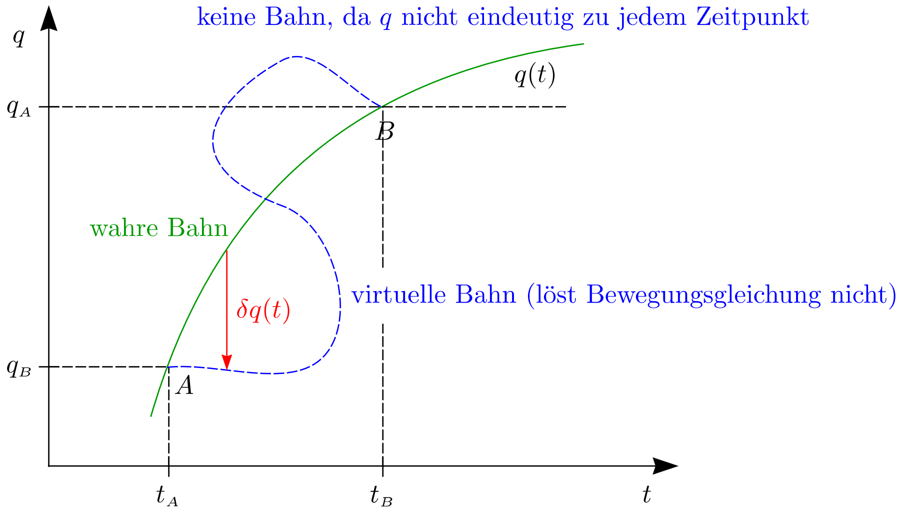
Hamilton'sches Extremalprinzip der Mechanik:



Für die Wirkung erhalten wir:

$$\boxed{S[q(t)] = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(q(t), v(t), t) \, \mathrm{d}t}$$

Die Wirkung S nimmt ein Minimum für die wahre Bahn (feste Anfangs- und Endpunkte) an.

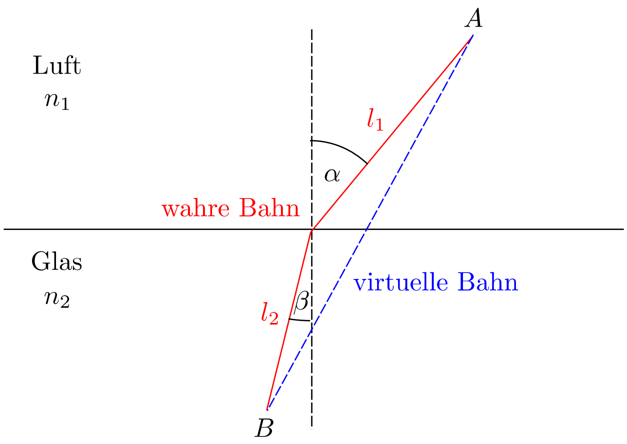


$S[q(t)]$ sei für $\overline{q}(t)$ stationär (Ableitung von S). Oft ist $S[q(t)]$ minimal für $q = \overline{q}(t)$, das heißt $S[\overline{q}(t)] \leq S[q(t)]$ für alle $q(t)$, die A und B verbinden.

1.4.1 Wirkungsprinzip und Bewegungsgleichungen

Die Natur liebt Extremalprinzipien wie beispielsweise das Fermat'sche Prinzip.

Brechungsgesetz:



$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$T_{AB} = \frac{l_1}{\frac{c_0}{n_1}} + \frac{l_2}{\frac{c_0}{n_2}}$$

Wenn die Zeit minimal wird, ist das Brechungsgesetz erfüllt.

Bezeichnungen:

$$S \underbrace{[q(t)]}_{\text{Argument}} : \text{Zahl} \mathrel{\hat{=}} \text{FUNKTIONAL}$$

- $\delta q(t)$ ist Variation von $q(t)$, „kleine" Funktion

  $q(t) = \overline{q}(t) + \delta q(t)$

- $\delta q(t)$ ist der Name der kleinen Größe, nicht das Differential der Funktion $q(t)$.
  (Meier $\neq$ M eier)

Wie folgt aus dem Wirkungsprinzip die Bewegungsgleichung?

Es sei $\delta q(t) = \epsilon \cdot \eta(t)$, wobei ϵ „klein" ist. η ist eine feste Funktion, die aber beliebig wählbar ist. Weiterhin muß $\eta(t_a) = \eta(t_b) = 0$ gelten.

Einsetzen in $S[q(t)]$ und Taylor-Entwicklung nach ϵ:

Extremum von $S(\epsilon) : S'(\epsilon) = 0$

$$\mathcal{L}\left(\overline{q} + \epsilon\eta, \dot{\overline{q}} + \epsilon\dot{\eta}, t\right) = \mathcal{L}\left(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t\right) + \left.\frac{\partial \mathcal{L}(q,v,t)}{\partial q}\right|_{\substack{q=\overline{q}\\ v=\dot{\overline{q}}}} \cdot \epsilon\eta + \left.\frac{\partial \mathcal{L}(q,v,t)}{\partial v}\right|_{\substack{q=\overline{q}\\ v=\dot{\overline{q}}}} \cdot \epsilon\dot{\eta}.$$

$\dot{q}$ kommt in 2 verschiedenen Bedeutungen vor:

1.) Name der Variablen Geschwindigkeit (zu q, $\dot{q}$, ...)

2.) Rechenoperation auf $q(t)$ angewandt: $\dot{q} = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$

Aus $y = f(x)$ folge $y = y(x)$.

$$S\left[q(t)\right] = S\left[\overline{q}(t)\right] + \epsilon \int\limits_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial q}\eta(t) + \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}(t)\right] \mathrm{d}t + O(\epsilon^2)$$

Unser Ziel ist die Stationarität von $S[q(t)]$. Dies erfordert $S'(\epsilon) = 0$, womit also gelten muß:

$$\int [\ldots] \, \mathrm{d}t = 0$$

$\eta(T)$ sei beliebig! Aus $\dot{\eta}(t)$ folgt dann $\eta(t)$ durch partielle Integration:

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \eta(t)\bigg|_{t_a}^{t_b}}_{=0} - \int\limits_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\right] \cdot \eta(t)\,\mathrm{d}t$$

$$S\left[q(t)\right] = S\left[\overline{q}(t)\right] + \epsilon \underbrace{\int\limits_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] \eta(t)\,\mathrm{d}t + \ldots}_{\stackrel{!}{=}0 \text{ für } \underline{\text{alle}}\ \eta(t)}$$

Der Integrand muß 0 sein, da $\eta(t)$ eine beliebige Funktion ist.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial q}}$$

Dies ist gerade die Lagrange-Gleichung 2.Art.

<u>Harmonischer Oszillator:</u>

$$\boxed{\mathcal{L}(x,\dot{x},t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{D}{2}x^2 + x \cdot f(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2} \cdot 2\dot{x}\right) = -\frac{D}{2} \cdot 2x + f(t)$$

$$m\ddot{x} + Dx = 0 + f(t)$$

Damit erhalten wir folgende Bewegungsgleichung:

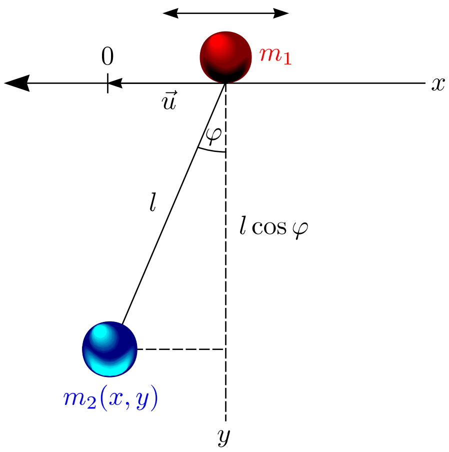
$$\boxed{m\ddot{x} + Dx = f(t)}$$

<u>Lagrange-Gleichung (2.Art):</u>

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial q_k}}$$

Die Voraussetzung ist, daß alle q_k's unabhängig sind, daß als keine Zwangsbedingungen zwischen den q_k's herrschen.

Beispiel:



Wir betrachten ein ebenes mathematisches Pendel mit frei gleitendem Aufhängepunkt mit Masse. Es gibt dann die Freiheitsgrade $1(m_1) + 1(m_2)$. Wir führen generalisierte Koordinaten ein:

$q_1 \mathrel{\hat{=}} u, q_2 \mathrel{\hat{=}} \varphi$

$x = l \cdot \sin\varphi + u$

$y = -l \cdot \cos\varphi$

Wir haben dann folgende Lagrange-Funktion:

$$\boxed{\mathcal{L}(u, \dot{u}, \varphi, \dot{\varphi}) = E_{kin} - E_{pot} = \frac{m_1}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - m_2 g \cdot (-l\cos\varphi)}$$

Wir differenzieren die Koordinaten nach der Zeit:

$\dot{x} = l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + \dot{u}, \dot{y} = -l\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{u} + l \cdot (\cos\varphi) \cdot \dot{\varphi})^2 + (l\sin\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 = \dot{u}^2 + l^2 \cdot (\cos^2\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{u}\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + l^2 \cdot (\sin^2\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2$

Durch Einsetzen in die Lagrange-Funktion erhalten wir:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{u} + m_2 gl \cdot \cos\varphi$$

Für u gilt:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\left(\frac{m_1 + m_2}{2}2\dot{u}\right) + m_2 l\cos\varphi\dot{\varphi}\right] = 0}$$

Des weiteren folgt für φ:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{m_2}{2}l^2 2\dot{\varphi} + m_2 l\cos\varphi\dot{u}\right] = m_2 l(-\sin\varphi)\dot{\varphi}\dot{u} - m_2 gl\sin\varphi}$$

1.) $(m_1 + m_2)\dot{u} + m_2 l \cdot (\cos\varphi) \cdot \dot{\varphi} = \text{const.}$
Es handelt sich um eine Erhaltungsgröße!

2.) $\ddot{\varphi} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[(\cos^2\varphi) \cdot \dot{\varphi}\right] + \frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\varphi}^2 \cdot \sin\varphi\cos\varphi = 0$ mit $\dot{u}$ aus (1), Konstante=0 gesetzt

Für $m_1 \mapsto \infty$ erhalten wir das übliche mathematische Pendel:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$

Mit $m_1 \mapsto 0$ haben wir folgendes Resultat:

$$\boxed{\ddot{\varphi} - \left(\cos^2\varphi \cdot \ddot{\varphi} + 2\cos\varphi\sin\varphi\dot{\varphi}^2\right) + \frac{g}{l}\sin\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi = 0}$$

$$\boxed{\sin^2\varphi \cdot \ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\cdot\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$

Newtongleichung $\xrightarrow{\text{Zwangsbedingungen}}$ Lagrange-Gleichung 1.+2.Art $\to \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$

Allgemeine Eigenschaften der Lagrange-Funktion:

a.) $\mathcal{L} \mapsto \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(q,t)$

$\phi(q,t)$ sei beliebige Funktion der Koordinaten und Zeit, die nicht von der Geschwindigkeit abhängig ist.

$$\tilde{S} = S + \underbrace{\int_{t_a}^{t_b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(\ldots)\,\mathrm{d}t}_{\text{const.}(t_a,t_b)}$$

$\phi(q,t)$ heißt „Eichfunktion“.

b1.) $\mathcal{L}(q_1,\ldots,q_f,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_f,t)$ hängt nicht von einer bestimmten Koordinate q_k (k fester Index) ab.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} \stackrel{!}{=} 0$$

q_k ist <u>zyklisch</u> $\Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}$ ist zeitlich konstant (Erhaltungsgröße).

<u>Ziel der Lagrangetheorie:</u> Wähle (wenn möglich) zyklische generalisierte Koordinaten!

b2.) $\mathcal{L}(q_1,\ldots,q_f,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_f)$ hängt nicht mehr von t ab. Daraus folgt:

$$\sum_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k - \mathcal{L} = \text{const.}$$

c.) Lagrange-Gleichungen 2.Art

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} \text{ für } k = 1,2,\ldots,f$$

p_k ist der verallgemeinerte Impuls, f_k die verallgemeinerte Kraft.

<u>Vorsicht:</u> $p_k \neq \text{const.}\cdot\dot{q}_k$

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = f_k$$

d.) Konsequenzen aus dem Relativitätsprinzip auf Lagrange-Funktion:
<u>Ein freies Teilchen:</u> Wir fordern ein Inertialsystem:

- Alle Zeitpunkte sind gleichwertig (wenn von außen keine zeitabhängigen Kräfte einwirken).

  $\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) \Rightarrow \mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}})$ ist unabhängig von t.

- Alle Raumpunkte sind gleichberechtigt.

  $\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}}) \Rightarrow \mathcal{L}(\dot{\vec{x}})$ ist vom Ort unabhängig.

- Alle Raumrichtungen sind gleichberechtigt.

  $\mathcal{L}(\dot{\vec{x}}) \Rightarrow \mathcal{L}\left((\dot{\vec{x}})^2\right)$ besser als $\mathcal{L}\left(|\dot{\vec{x}}|\right)$

Bemerkung:

Es darf eigentlich nicht auf die Unabhängigkeit von (2) geschlossen werden, sondern höchstens auf die Invarianzbedingung des erweiterten Noethertheorems. Ein Gegenbeispiel ist:

Homogenes Kraftfeld $\Leftrightarrow$ Alle Raumpunkte gleichberechtigt, aber $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \neq 0$

Relativitätsprinzip:

Wir haben zwei Inertialsysteme, die sich mit relativer Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ bewegen.

$\vec{v} \mapsto \vec{v} + \vec{v}_0 \qquad (+ \text{ oder } -?)$

$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\left((\vec{v}+\vec{v}_0)^2\right) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{L}\left(\vec{v}^2\right) \qquad (\vec{v} = \dot{\vec{x}})$

Wenn das Relativitätsprinzip für die Lagrange-Funktion gelten soll, muß folgendes erfüllt sein:

$$\mathcal{L}\left((\vec{v}+\vec{v}_0)^2\right) = \mathcal{L}\left(\vec{v}^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{r},t)$$

f sei hierbei eine unbekannte Funktion, die vom Ort $\vec{r}$ und der Zeit t abhängt. Allgemein gilt nun für deren Zeitableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{r},t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv (\text{grad } f) \cdot \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Wir betrachten nun die Taylor-Entwicklung von $\mathcal{L}$:

$$\tilde{\mathcal{L}}\Big(\vec{v}^2 + \underbrace{2\vec{v}\vec{v}_0 + \vec{v}_0^2}_{\text{kleine Größe } \epsilon}\Big) = \mathcal{L}\left(\vec{v}^2\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}^2} \cdot \epsilon + \ldots = \mathcal{L}\left(\vec{v}^2\right) + \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{v}^2)} \cdot 2\vec{v}_0\right]}_{\substack{\text{darf nicht von} \\ \vec{v} \text{ abhängen}}} \vec{v} + \ldots$$

Wegen $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{r},t) = (\text{grad}\, f) \cdot \vec{v} + \dfrac{\partial f}{\partial t}$ muß $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{v}^2)} 2\vec{v}_0\vec{v}$ linear in $\vec{v}$ sein und damit $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{v}^2)} \cdot 2\vec{v}_0$ unabhängig von $\vec{v}$. Damit hängt $\mathcal{L}$ linear von $\vec{v}^2$ ab:

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\vec{v}^2\right) = \underbrace{\text{const.}}_{\frac{m}{2}} \cdot \vec{v}^2}$$

„Blick über den Zaun": Quantenmechanik

In der Quantenmechanik hat man eine sogenannte Wellenfunktion:

$$\Psi(x,t) = \sum_{\substack{\text{alle Pfade} \\ x(t)}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{S[x(t)]}{\hbar}}$$

1.4.2 Mathematischer Einschub: Extremalproblem

a.) Funktion einer Variablen: $y = f(x)$

Aus $f'(x) = 0$ folgt durch Auflösen x_0 als Extremwert. Es handelt sich dann um ein Minimum, falls $f''(x_0) > 0$ bzw. um ein Maximum, falls $f''(x_0) < 0$ ist. Im Falle $f''(x_0) = 0$ haben wir einen eventuellen Wendepunkt.

Beispiel:

Wir betrachten die Funktion $y = x^4$. Für die Ableitungen der Funktion gilt:

$y' = 4x^3$

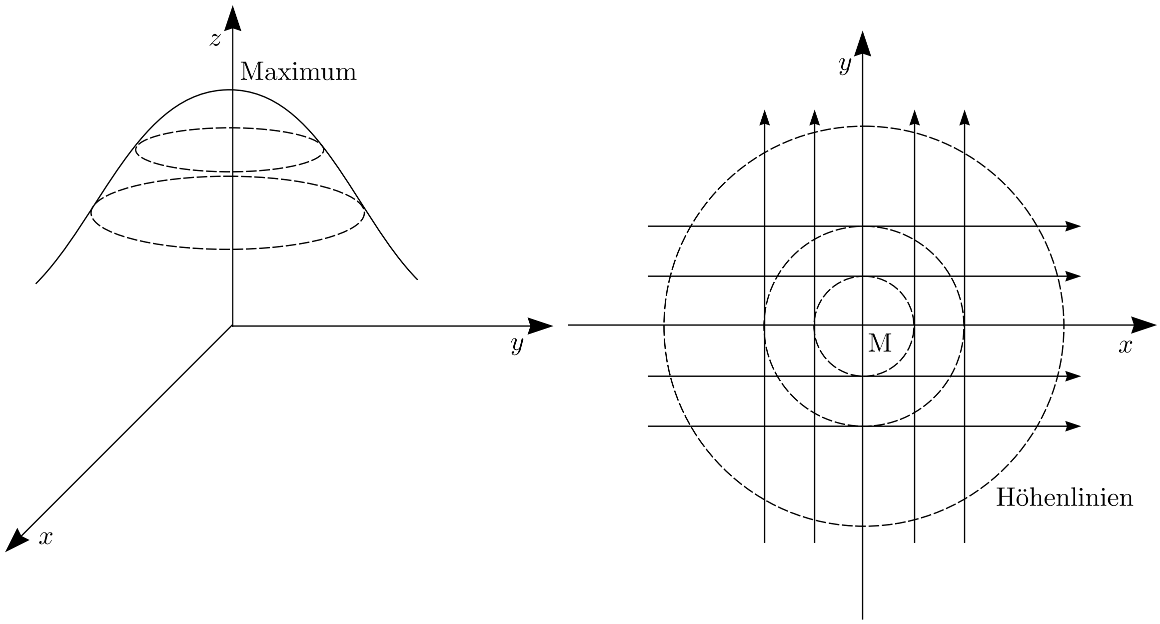
$y'' = 12x^2$

$y''' = 24x$

$y^{(4)} = 24$

b.) Zwei unabhängige Veränderliche x, y

$z = f(x, y)$



Für die Extremwerte, muß folgendes gelten:

$$\underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}_{f_x} = 0 \text{ und } \underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}_{f_y} = 0$$

x_0, y_0 heißt dann Extremalpunkt (stationärer Punkt) von $f(x, y)$. Wir untersuchen $F(s) = f(x_0 + s\cos\alpha, y_0 + s\sin\alpha)$ mit festem α:

$$F'(0) = f_x(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\sin\alpha$$

$$F''(0) = f_{xx} \cdot \cos^2\alpha + f_{yy} \cdot \sin^2\alpha + f_{xy} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + f_{yx} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$F''(0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot \cos^2\alpha + f_{yy} \cdot \sin^2\alpha + 2f_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\boxed{F''(0) = \begin{cases} > 0\,\forall\alpha & \text{Minimum} \quad f_{xx} > 0 \quad f_{yy} > 0 \\ < 0\,\forall\alpha & \text{Maximum} \quad f_{xx} < 0 \quad f_{yy} < 0 \end{cases}}$$

Andernfalls handelt es sich um einen Sattelpunkt.
f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} sei bei (x_0, y_0) bekannt. $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ gilt sowohl für Minimum als auch Maximum!

Beispiel:

Betrachten wir folgende Funktion von x und y:

$$z = f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_x = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x)$$

$$f_{xx} = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \cdot \left((-2x)^2 - 2\right) \xrightarrow{x=0,y=0} -2$$

$$f_x = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y)$$

$$f_{xx} = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \cdot \left((-2y)^2 - 2\right) \xrightarrow{x=0,y=0} -2$$

$$f_{xy} = (-2x) \cdot (-2y) \cdot \mathrm{e}^{-(x^2+x^2)} = 0$$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)^2 - 0 = 4 > 0$$

Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung:

$z = f(x, y)$ mit $g(x, y) = 0$

Beachte: x, y sind nicht unabhängig.

- ✳ $y = y(x)$ aus Nebenbedingung und $F(x) = f\,(x, y(x))$ nach a.)
- ✳ Lagrange-Parameter λ
  Man betrachtet eine Funktion, die von 3 Variablen abhängig ist:

  $$\underbrace{F(x, y, \lambda)}_{\text{unabhängig}} = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Extremal- und Variationsproblem:

Funktion zweier unabhängiger Variablen $z = f(x, y)$

1.) Stationärer Punkt x_0, y_0: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

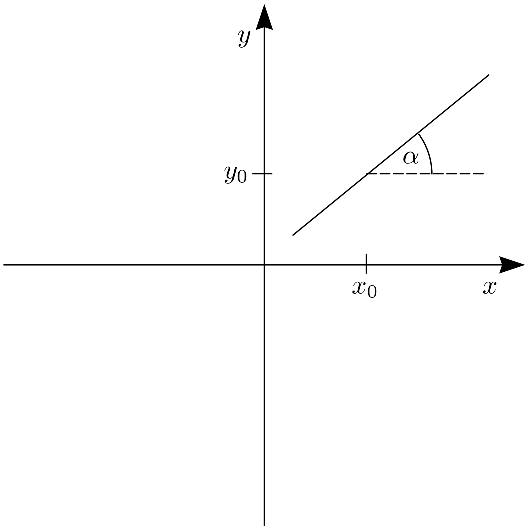
2.) Diskussion der stationären Punkte:

Minimum: $f_{xx} > 0, f_{yy} > 0, f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

Maximum: $f_{xx} < 0, f_{yy} < 0, f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

Wenn die Matrix $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ indefinit ist, handelt es sich um einen Sattelpunkt. Bei Semi-Definitheit sind weitere Untersuchungen notwendig!

Beweisskizze zu $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$



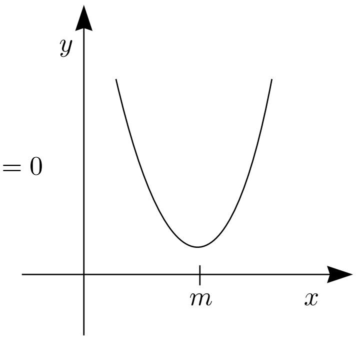
$F(u) = f(x_0 + u\cos\alpha, y_0 + u\sin\alpha), \alpha$ fest

Viel einfacher ist folgende Betrachtung:

$F(u) = f(x_0 + u, y_0 + mu), m = \tan\alpha \qquad y = m \cdot x$

$F''(u)|_{u=0} = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot 1 + f_{xy} \cdot m \cdot 2 + f_{yy} \cdot m^2 > 0$

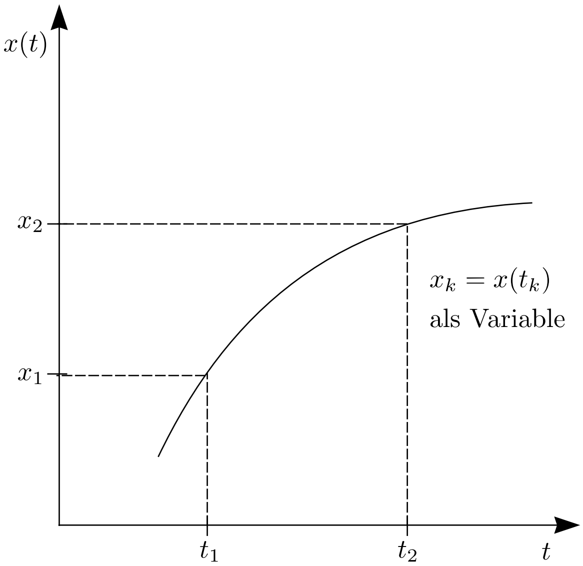
$u = 0$



Durch Differentiation nach m erhalten wir $2f_{xy} + 2m_0 f_{xy} \stackrel{!}{=} 0$. Anschließend setzen wir $m_0 = -\frac{f_{xy}}{f_{yy}}$ in $F''(0)$ ein und fordern $F''(0) > 0$. Für N unabhängige Variablen $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ findet man die stationären Punkte durch:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \,\forall\, k = 1, 2, \ldots, N}$$

Funktion $x(t)$ als „Variable“



Funktion $f(x_1, \ldots, x_N) \mapsto f[x(t)]$ (Funktional)

Beispiel:

$$f[x(t)] = \int\limits_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t)\, \mathrm{d}t \text{ mit } \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t)$$

Die stationären „Punkte“ findet man dann durch Lösen von:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}}$$

1.4.3 Extremalaufgabe mit Nebenbedingung

Beispiel:

Es sei $z = f(x, y)$ mit $g(x, y) = 0$ als Nebenbedingung gegeben. Es gibt zwei Arten von Nebenbedingungen:

- Holonome Bedingung, Gleichung für Koordinaten
- Nicht holonome Bedingung

  $x^2 + y^2 < l^2$ oder Differentialgleichung

Vorgehen für Nebenbedingungen:

1.) Eliminiere $y = y(x)$ aus Nebenbedingungen $f(x, y(x)) = F(x)$ eine unabhängige Variable

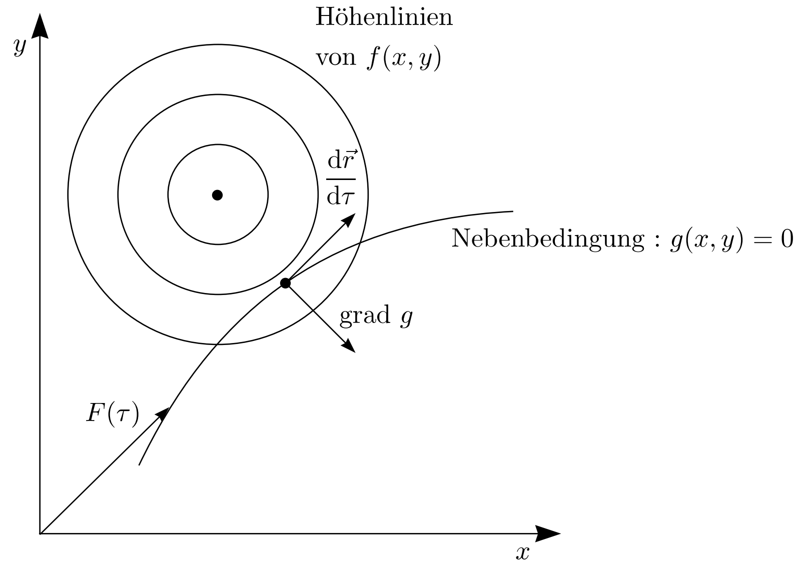
2.) „Generalisierte Koordinate: $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, so daß Nebenbedingungen erfüllt sind

$$F(\tau) = f(x(\tau), y(\tau))$$

3.) Lagrange-Parameter λ

$$F \underbrace{(x, y, \lambda)}_{\text{unabhängig}} := f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Beweisskizze:



a.) $\frac{d}{d\tau} f(x(\tau), y(\tau)) = f_x \cdot \frac{dx(\tau)}{d\tau} + f_y \frac{dy(\tau)}{d\tau} \overset{!}{=} 0 = (\text{grad} f(x,y)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\tau}$

b.) $\frac{d}{d\tau} g(x(\tau), y(\tau)) = 0 = \text{grad}\, g(x,y) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\tau}$

Also ist grad(f) =const. $\cdot$ grad(g) für stationäre Punkte, d.h. man findet die stationären Punkte mit:

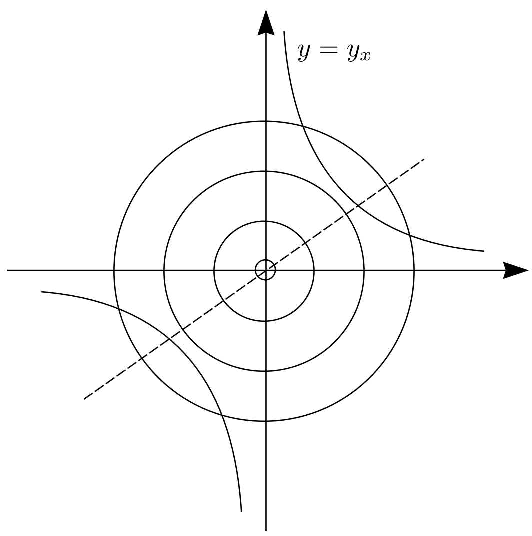
$$\boxed{\text{grad}\Big(\underbrace{(f(x,y)+\lambda g(x,y))}_{\substack{\text{Definiere } F(x,y,\lambda)= \\ f(x,y)+\lambda g(x,y)}}\Big) \overset{!}{=} 0}$$

Beispiel:

Wir betrachten Die Funktion $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ mit der Nebenbedingung $g(x,y) = xy - 1 = 0$ und berechnen die stationären Punkte:

$y = \frac{1}{x}$

$F = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 1)$



$F_x = 2x + \lambda y \overset{!}{=} 0$

$F_y = 2y + \lambda x \stackrel{!}{=} 0$

$F_\lambda = xy - 1 = 0$

Mit $x = y$, was man aus den ersten beiden Gleichungen erhält, folgt durch Einsetzen in F_λ:

$x^2 - 1 = 0$

Daraus erhält man dann folgende Lösungen des Problems (Variation mit holomorpher Nebenbedingung):

$\boxed{x = y = 1 \vee x = y = -1}$

Nun wieder zurück zur Physik! Betrachten wir die Langrange-Funktion:

$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - V(\vec{r}, t), \vec{r}$ unabhängig

Wir haben die Nebenbedingung $g(x, y, z, t) = g(\vec{r}, t) = 0$.

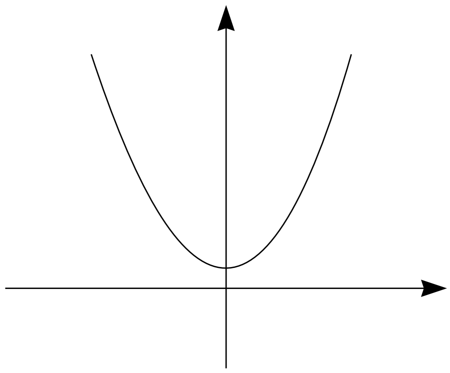
$$S[\vec{r}(t)] = \int\limits_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\,\mathrm{d}t + \int \lambda(t) g(x(t), y(t), z(t), t)\,\mathrm{d}t$$

Für die Extrema folgt dann:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} + \lambda(t)\frac{\partial g(x, y, z, t)}{\partial x_k}}$$

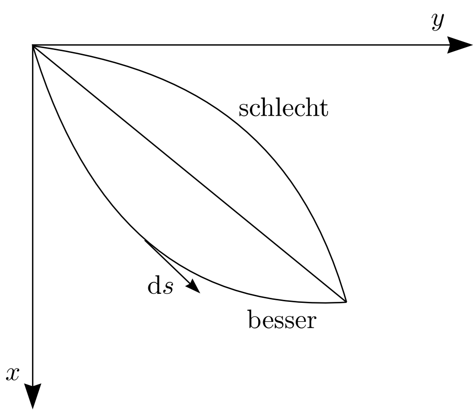
Dies ist die Lagrange-Gleichung 1.Art (Varitation mit isoperimetrischer Nebenbedingung).

Kettenlinie:



Minimum der potentiellen Energie

Optimale Rutschbahn (Brachystochrone):



Wir suchen die kürzeste Rutschzeit:

* Geschwindigkeit:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2gx}}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx$$

* Bogenlänge:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

* Rutschzeit:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^{x_2} \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

* Analogie zur Mechanik:

$$x \mapsto t$$

$$y' \mapsto \dot{x}, v$$

Nun kommen wir zur Berechnung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \stackrel{!}{=} 0$$

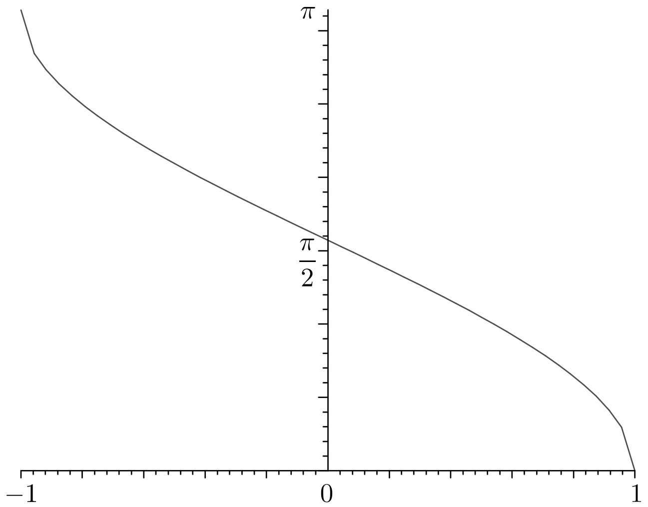
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}_{\text{const.}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const.} = \frac{1}{2a}$$

Wir lösen nach y' auf und erhalten:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{2(a-x)-2a}{2\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}}$$

$$\boxed{y(x) = a\cdot\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) - \sqrt{2ax-x^2} + \text{const.}}$$



Arkuskosinus

Kettenlinie ist Kosinushyperbolikus
a folgt aus $y(x_c) = y_c$. $y(x)$ ist eine sogenannte Zykloide. Wir können diese Gleichung auch in Parameterdarstellung folgendermaßen schreiben:

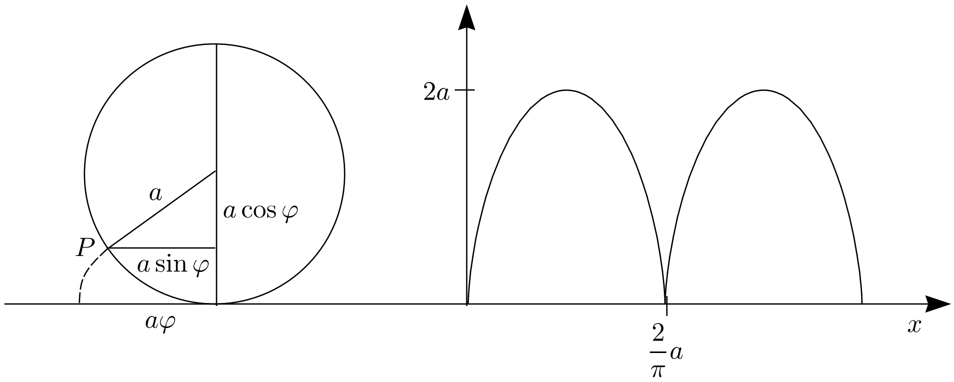
$x = a(1 - \cos\varphi)$

$y = a(\varphi - \sin\varphi)$

In der Mathematik vertauscht man x mit y ($x \mapsto y$):

$\boxed{x = a(\varphi - \sin\varphi)}$

$\boxed{y = a(1 - \cos\varphi)}$



1.5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Eine Symmetrie ist eine Transformation der Koordinaten und Zeit, die eine charakteristische Größe invariant läßt (Bewegungsgleichungen $\mapsto S[q(t)] \mapsto \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$). $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ ist invariant gegen $t \mapsto t + t_0$, d.h. $\mathcal{L}$ hängt nicht explizit von t ab. Dies nennt man „Homogenität der Zeit“.

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}}\underbrace{\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}}_{\dot{q}} + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}}_{p}\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\dot{q} + p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{q}\right)}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{q})}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{q} - \mathcal{L}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

Es handelt sich um ein Integral der Bewegung, also eine Erhaltungsgröße. Falls $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = 0$ ist, gilt $p\dot{q} - \mathcal{L} = \text{const.}$

Bemerkung:

Eigentlich ist „Homogenität der Zeit“ die Invarianz des mechanischen Systems gegenüber Zeittranslationen. Somit ist die Invarianz der Lagrangegleichung und nicht die Invarianz der Lagrangefunktion entscheidend!
Die Invarianz der Lagrangegleichung folgt aus der Invarianzbedingung des erweiterten Noethertheorems. Im Falle der Zeittranslation folgt die Invarianz der Lagrangegleichung auch aus der Invarianz der Lagrangefunktion. Die Invarianzbedingung ist also allgemeiner.

Symmetrie:

Darunter versteht man die Invarianz der Lagrangefunktion (und damit der Bewegungsgleichung) unter einer (einparametrigen) Transformation von Raum und Zeit. Aus der Gleichheit der Lagrangefunktion folgt die Gleichheit der Bewegungsgleichungen. Die Umkehrung gilt allerdings im allgemeinen nicht.

a.) Invarianz gegen Zeitverschiebung $t \mapsto t + t_0$ („Homogenität der Zeit“)

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \mapsto \mathcal{L}(q, \dot{q})$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) \text{ auf Bahnkurve } q(t)$$

Wir folgern als Erhaltungsgröße:

$$\underbrace{\boxed{E = p\dot{q} - \mathcal{L}}}_{\text{Energie}}, p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

b.) Verschiebung des Koordinatensystems

$$\vec{r}_a \mapsto \vec{r}_a + \vec{\epsilon} \qquad \text{(kleine Verschiebung)}$$

$$\vec{v}_a \mapsto \vec{v}_a$$

Der Index a bezeichnet die Nummer des Teilchens.

$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \underbrace{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N, t}_{\text{kein Einfluß}})$ ist invariant gegen $\vec{\epsilon}$.

Wir führen nun eine Kurzbezeichnung ein, die eigentlich verboten ist, nämlich die Differentiation nach einem Vektor. Also definieren wir:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} := \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}\right) = \mathrm{grad}_{\vec{r}}\mathcal{L}}$$

Dies hat folgende Konsequenzen für die Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_a}}_{\vec{p}_a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_a} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}$$

$$\mathrm{d}f = f'(x)\underbrace{\mathrm{d}x}_{\vec{\epsilon}}$$

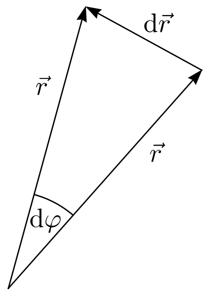
$$\mathrm{d}\mathcal{L} = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_a}\vec{\epsilon} = \sum_a \left(\frac{1}{\mathrm{d}t}\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_a}}_{\vec{p}_a}\right) \cdot \vec{\epsilon}$$

$\mathrm{d}\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_a \vec{p}_a\right) \cdot \vec{\epsilon} \overset{!}{=} 0$ soll für beliebiges $\vec{\epsilon}$ gelten, also:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\sum_a \vec{p}_a}_{\vec{p}} = 0$$

Wir nennen $\vec{p}$ Impuls (generalisierter Impuls), wobei als Nebenbedingung gelten soll, daß dieser sowohl additiv als auch mengenartig ist.

c.) Invarianz gegen Drehungen des Koordinatensystems



$|d\vec{r}| = |\vec{r}| \cdot |d\varphi|$

- Drehung um beliebige Achse $dr\vec{\varphi}$
- Drehung um Winkel $|d\varphi|$

Für kleine Drehungen gilt:

$$\boxed{d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}}$$

Demnach erhalten wir für das Teilchen:

$$d\vec{r}_a = d\vec{\varphi} \times \vec{r}_a$$

$$d\vec{v}_a = d\vec{\varphi} \times \vec{v}_a \qquad \vec{p}_a \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{v}_a) = d\vec{\varphi} \cdot (\vec{v}_a \times \vec{p}_a) + \text{Produktregel}$$

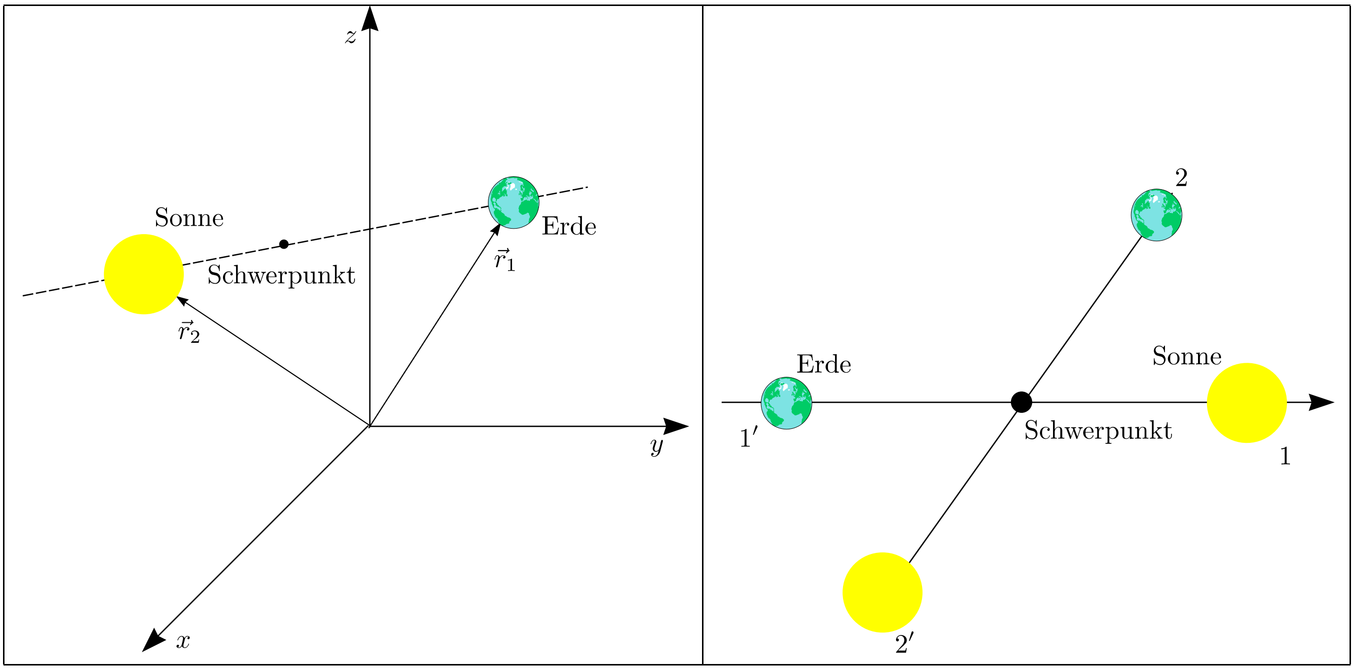
$$d\mathcal{L} = \sum_a \Big[\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_a}}_{\frac{d}{dt}\vec{p}_a} \cdot d\vec{r}_a + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_a}}_{\vec{p}_a} \cdot d\vec{v}_a \Big]$$

$$d\mathcal{L} = d\vec{\varphi} \cdot \sum_a \frac{d}{dt} (\vec{r}_a \times \vec{p}_a) \stackrel{!}{=} 0 \,\forall\, d\vec{\varphi} \Rightarrow \vec{L} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a \text{ ist erhalten.}$$

Die drei genannten Fälle sind Spezialfälle des sogenannten Noether-Theorems: Invarianz der Lagrangefunktion gegen Raum-Zeit-Transformation (einparametrig, infinitesimal) Dies findet man speziell im Fließbach unter dem Kapitel „Erhaltungsgrößen“.

Kapitel 2

Zweikörper-System mit zentraler Wechselwirkung



Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_1 = f(r)\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \end{aligned}}$$

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$f(r) = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} = -\dfrac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}$

$U(r) = -G\dfrac{m_1 m_2}{r} = -\dfrac{d}{r}$

Das Ziel ist es, die Bewegungsgleichungen zu lösen. Leider ist kein Ansatz für beliebige $U(r)$ möglich.

- 2 Körper, 3 Dimensionen $\Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$ Freiheitsgrade
- $2f - 1 = 12 - 1 = 11$ unabhängige Integrale der Bewegung, die nicht von t abhängen

Integrale der Bewegung:

1. Impuls (3 Integrale der Bewegung):

   $$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}$$

   Der Gesamtimpuls ergibt sich aus Relativ- und Schwerpunktskoordinaten:

   $$\left.\begin{array}{l} \vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{R} := \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \end{array}\right\} \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{R} - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{array}\right.$$

   $$\underbrace{(m_1 + m_2)}_{M}\dot{\vec{R}} = \vec{p}$$

2. Energie (1 Integral der Bewegung):

   $$E = \frac{m_1}{2}\vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{2}\vec{v}_2^2 + U\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \underbrace{\frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2}_{E_{SP}} + \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U\left(\vec{r}\right)}_{E_{rel}\,(1)} = \frac{\vec{p}^2}{2M}$$

3. Drehung (3 Integrale der Bewegung):

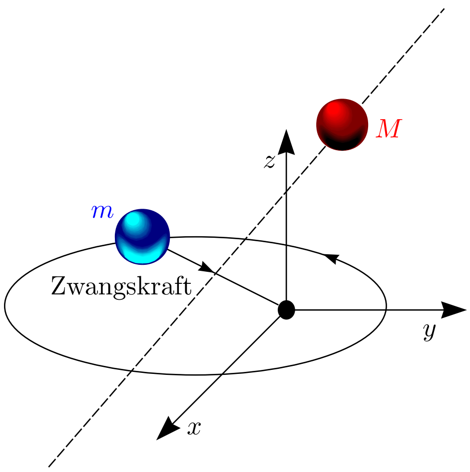
   $$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

   Das ganze verhält sich additiv:

   $$\vec{L} = \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}}_{\vec{L}_{SP}} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{p}}_{\vec{L}_{rel}}$$

   Getrennt erhalten wir 5 Integrale der Bewegung. $\vec{L}_{SP} = \vec{R} \times \vec{P}$ besteht aus 3 Komponenten. Da $\vec{L}_{SP} \perp \vec{P}$, sind aber nur 2 Komponenten von $\vec{L}_{SP}$ unabhängig. Damit wären nun 9 von 11 Integralen der Bewegung gefunden.

Provokation:



Freies Teilchen (Schwerpunkt)

$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t$ mit $\vec{R}_0, \vec{V}_0$ beliebig

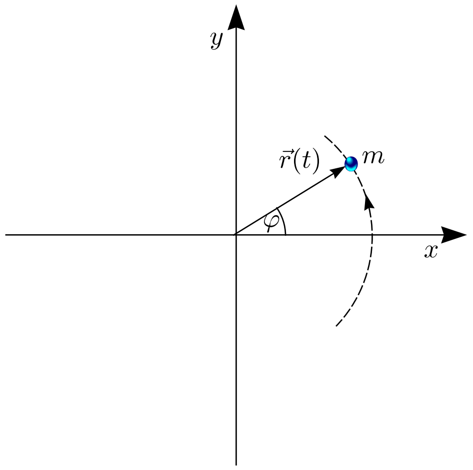
Kepler-Ellipse für $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$

M, m sind Teilchen, aber keine Körper; haben auch keine Wechselwirkung.

Relatives und Schwerpunktsystem ungekoppelt:

- Schwerpunkt: $\vec{R}$ freies Teilchen
- Relativ: Teilchen in Zentralkraftfeld

  $\vec{L}_{rel}$ ist erhalten, Bewegung in einer Ebene



Wir führen Polarkoordinaten ein:

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, (z = 0)$

$m\ddot{\vec{r}} = f(r)\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$	$E_{rel} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U\left(\lvert\vec{r}\rvert\right)$ erhalten
Differentialgleichung 2.Ordnung Separation der Variablen r	Differentialgleichung 1.Ordnung. Separation der Variablen t

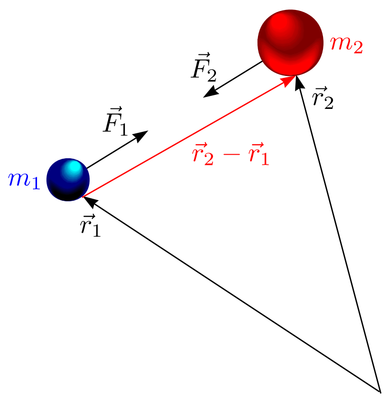
Zusammenfassung:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = +\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{F}_1 = -\mathrm{grad}V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(\lvert\vec{r}_1 - \vec{r}_2\rvert)$$



$$\left.\begin{array}{ll} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & \text{Relativbewegung} \\ \vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} & \text{Schwerpunktbewegung} \end{array}\right\} \text{Variable}$$

$\boxed{M\ddot{\vec{r}} = 0}$ freies Teilchen der Masse $M = m_1 + m_2$

$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = -\dfrac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\right)}$ Teilchen im Potential $U(r), m = \dfrac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2}, \vec{p} = m\dot{\vec{r}}$

Hierbei handelt es sich nun um ungekoppelte Gleichungen! Wir nutzen die Integrale der Bewegung aus:

- Impuls (3):

  $$\vec{P} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2$$

- Gesamtenergie (2):

  $$E = \underbrace{\frac{M}{2}\dot{\vec{R}}}_{\text{SP (1)}} + \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U(r)}_{\text{Rel (1)}}$$

- Gesamte Drehung (4):

  $$\vec{L} = \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}}_{(3)\mapsto(1)} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{p}}_{(3)}$$

- 10.Integral der Bewegung:
  Es handelt sich um den Lenz-Runge-Vektor für $U(R) = -\frac{\alpha}{r}$ gilt:

  $$\underbrace{\vec{\Lambda} = \vec{v} \times \vec{L} - \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)}_{(3)\mapsto(1)}$$

- 11.Integral der Bewegung: ?

Preisaufgabe (Whiskey, 1 Flasche)

- Wie lautet das 11 Integral der Bewegung?

  $$I_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2)$$

- Was ist dessen physikalische Bedeutung?

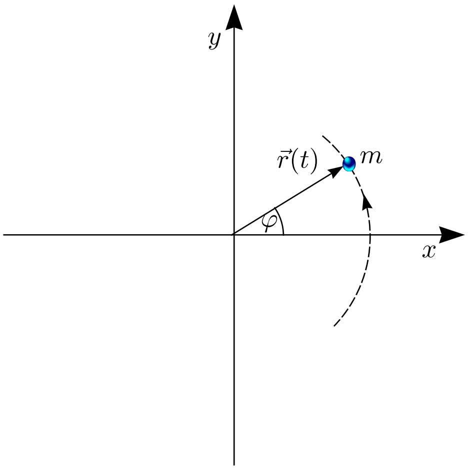
Vorbemerkung:

Die Aufgabe muß selbst gelöst sein. Bei mehreren richtigen Lösungen entscheidet das Los. Der Einsendeschluß ist der 5.Juli 2002.

Innere Drehung:

$\vec{L}_{rel} = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})$: Bewegung in einer Ebene (x-y-Ebene)

$L_{z,rel} = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2 \cdot \cdot \dot{\varphi}$



2.1 Energie des relativen Systems

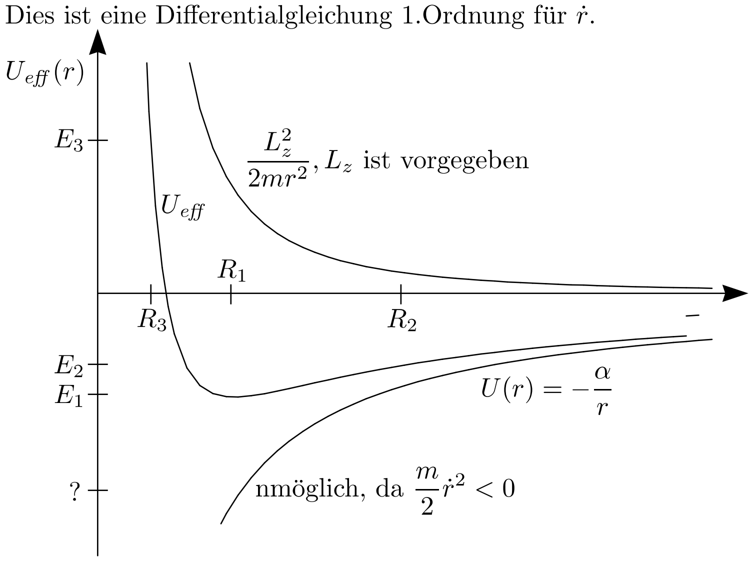
$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$E_{rel} = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}}\right)^2 + U\left(|\vec{r}|\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + U(r)$

$$\underbrace{E}_{\text{const.}} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\overbrace{\frac{L_{z,rel}^2}{2mr^2}}^{\text{const.}} + U(r)}_{U_{\mathit{eff}}(r)}$$

Dies ist eine Differentialgleichung 1.Ordnung für $\dot{r}$.



- Punkt 1:

  $\frac{m}{2}\dot{r}^2 = 0$

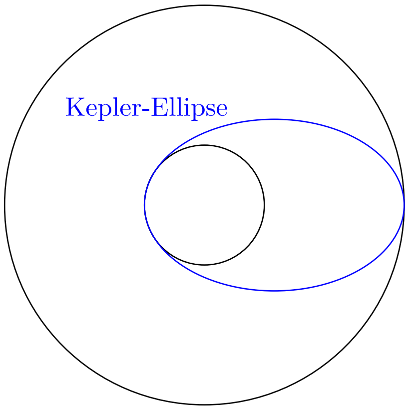
  Für $r = R$ ergibt sich eine Kreisbahn.

- Punkt 2:

  Für $R_1 < r < R_2$ erhalten wir eine finite Bewegung (Ellipse).

- Punkt 3:

  Für $r \geq R$ resultiert eine infinite Bewegung (Hyperbel).



2.2 Lösung der Radialgleichungen

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + U_{\mathit{eff}}(r) = \text{const.}$$

Man führt eine Trennung der Veränderlichen r, t durch:

$$\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{\mathit{eff}}(r)\right]} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$\underbrace{\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{\mathit{eff}}(r)\right]}}}_{\text{Funktion von } r} = \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}t = t - t_0$$

2.3 Keplerproblem

$$r = r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Man eliminiert nun $\mathrm{d}t$ durch $\mathrm{d}\varphi$, indem man die Zeit durch den Drehimpuls ausdrückt:

$$L_z = mr^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$\int \mathrm{d}\varphi = \int \frac{\frac{L_z}{mr^2}}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{\mathit{eff}}(r)\right]}}\,\mathrm{d}r = \varphi - \varphi_0$$

Mit quadratischer Ergänzung folgt dann:

$$\frac{2}{m}\left[E - V_{\mathit{eff}}\right] = \underbrace{\left(\frac{2E}{m} + \frac{\alpha}{L_z}\right)^2}_{\eta^2} - \underbrace{\left(\frac{L_z}{2mr} - \frac{\alpha}{L_z}\right)^2}_{\xi^2}$$

Zähler ist die Ableitung des Radikanten der Wurzel im Nenner!

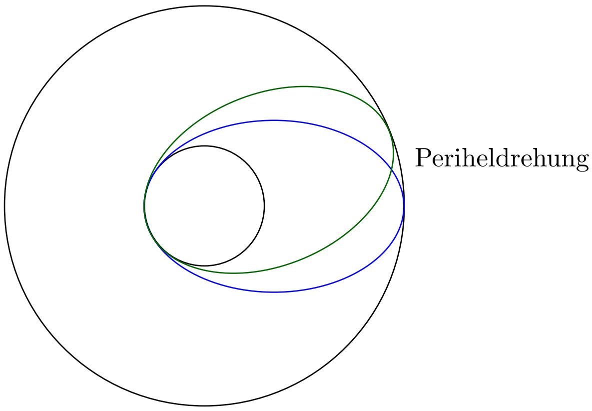
$$\boxed{\varphi - \varphi_0 = \int \frac{-\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi^2}} = \mp \arccos\left(\frac{\xi}{\eta}\right)}$$

Wir bilden die Umkehrfunktion und drücken r durch $r(\varphi)$ aus:

$$\boxed{p = \frac{L_z^2}{m|\alpha|},\ \epsilon = \sqrt{1 + 2\frac{EL_z^2}{m\alpha^2}},\ a = \frac{|\alpha|}{2|E|},\ b = \frac{L_z}{\sqrt{2m|E|}}}$$

Diese Größen sind also nur von E abhängig!

$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^n} \qquad n \neq 1$



- Mehr:

  $\approx 600 \,\frac{\text{Bogensekunden}}{100\,\text{Jahre}}$

- Experiment:

  $40 \,\frac{\text{Bogensekunden}}{100\,\text{Jahre}}$ Defizit

Kapitel 3

Hamiltonsche Formulierung der Mechanik

Ziele:

- Energie an 1.Stelle
- Koordinate $x \mapsto q \mapsto Q, \dot{x} \mapsto \dot{q} \mapsto \dot{Q}$
  Geschwindigkeiten folgen aus der Koordinatentransformation. Koordinaten und Impulse werden mathematisch betrachtet.
- Quantenmechanik leichter mit Hamiltonformel als mit Lagrangeformel

1. Hamiltonfunktion und Bewegungsgleichung

   ➢ Lagrangefunktion:

   $$\boxed{\mathcal{L}(q,\dot{q},t), p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}}$$

   ➢ Bewegungsgleichung:

   $$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = f}$$

   Diese ist die Newton-Form der Lagrange-Bewegungsgleichung.

   ➢ Totales Differential:

   $$\boxed{\mathrm{d}\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}}_{f}\,\mathrm{d}q + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}}_{p}\,\mathrm{d}\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\,\mathrm{d}t}$$

   Hamiltonfunktion:

   $$\boxed{\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} \text{ als Funktion von } q,\ p,\ t}$$

   Betrachten wir hier das totale Differential:

   $$\mathrm{d}\mathcal{H}(\underbrace{q,p,t}_{\text{unabhängig}}) = \frac{\partial \mathcal{H}(q,p,t)}{\partial q}\,\mathrm{d}q + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\,\mathrm{d}p + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\,(p\dot{q} - \mathcal{L}) = \mathrm{d}(p\dot{q}) - \mathrm{d}\mathcal{L} =$$

   $$= p\,\mathrm{d}\dot{q} + \dot{q}\,\mathrm{d}p - \mathrm{d}\mathcal{L} = p\,\mathrm{d}\dot{q} + \dot{q}\,\mathrm{d}p - f\,\mathrm{d}q - p\,\mathrm{d}\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\,\mathrm{d}t =$$

   $$= \underbrace{\dot{q}}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}}\,\mathrm{d}p + \underbrace{(-f)}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}}\,\mathrm{d}q \underbrace{-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}}\,\mathrm{d}t$$

Wir erhalten 2 gekoppelte Differentialgleichungen:

$$\boxed{\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}(p,q,t)}{\partial p}}$$

$$\boxed{\dot{p} = f = -\frac{\partial \mathcal{H}(p,q,t)}{\partial q}}$$

Dies sind die Hamiltonschen (kanonischen=unveränderlichen) Bewegungsgleichungen. Dabei handelt es sich um zwei gekoppelte Differentialgleichungen 1.Ordnung für $p(t)$ und $q(t)$.

Beispiel: Harmonischer Oszillator

$$\mathcal{L}(x,\dot{x},t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{D}{2}x^2$$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L} = \frac{2m\dot{x}^2}{2} - \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{D}{2}x^2\right)$$

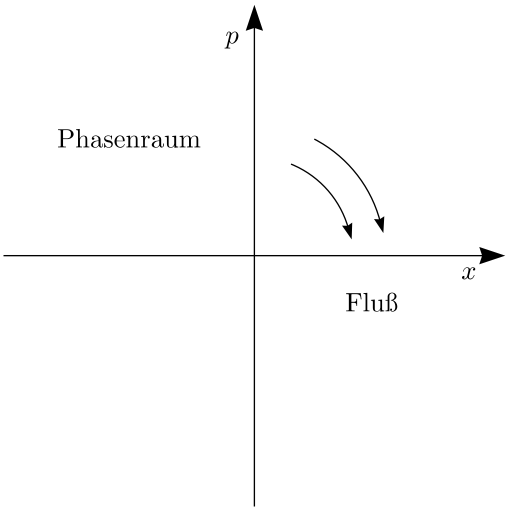
$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{D}{2}x^2$$

Die Hamilton-Funktion entspricht im Falle des harmonischen Oszillators der Energie!

$$\boxed{\mathcal{H}(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2}x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -Dx$$



1. Hamilton-Funktion und Bewegungsgleichung

	„Systemfunktion“		Bewegungsgleichungen
Lagrange	$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$	$p = \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}, f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$	$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = f$
Hamilton	$\mathcal{H} := p\dot{q} - \mathcal{L}$		$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}(p,q,t)}{\partial p}$
	$\mathcal{H} = \mathcal{H}(p,q,t)$		$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}(p,q,t)}{\partial q}$
			2 Differentialgleichungen 1.Ordnung (Kanonische Gleichungen)

Es gibt verschiedene Fachbegriffe, mit denen man den Impuls p bezeichnet:

- Verallgemeinert
- Generalisiert
- Kanonisch
- Kanonisch konjugiert
- Konjugiert (zu q)

2. Zeitliche Änderung physikalischer Größen, Poisson-Klammer

Es sei eine physikalische Größe $G = G(p, q, t)$ (Zustandsgröße) gegeben. Dann wird die Zustandsänderung längs der Bahnkurve dargestellt durch:

$$\frac{\mathrm{d}G(p(t), q(t), t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial G(p, q, t)}{\partial p} \underbrace{\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}}_{-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}} + \frac{\partial G(p, q, t)}{\partial q} \underbrace{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}} + \frac{\partial G(p, q, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial G(p, q, t)}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}}_{\text{Poisson-Klammer } \{\mathcal{H}, G\}}$$

Wir notieren uns die Definition Poisson-Klammern (Reihenfolge: Landau-Lifschitz (und nicht Fließbach!)):

$$\boxed{\{F, G\} := \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j} - \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j}}$$

Eigenschaften:

1.) Antisymmetrie:

$$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

2.) $\{F, C\} = 0$, wenn C unabhängig von p, q ist

3.) Linearität:

$$\{\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2, G\} = \alpha_1 \{F_1, G\} + \alpha_2 \{F_2, G\}$$

4.) $\{F_1 \cdot F_2, G\} = F_1\{F_2, G\} + \{F_1, G\}F_2$

5.) Jacobi-Identität:

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3\{F_1, F_2\}\} = 0 \text{ für alle } F_1,\ F_2,\ F_3$$

6.) $\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \{p_j, q_k\} = \{q_j, p_k\} = 0$ für kanonische Variablen

7.) $\{\mathcal{H}, F\} = 0$
Daraus folgt, daß $F =$ eine Erhaltungsgröße (Integral der Bewegung) ist, wenn F nicht explizit von t abhängt.

8.) Differentiation nach p, q:

$$\frac{\partial F(p, q, t)}{\partial p} = \{F, q\}$$

9.) Algebraische Operation:

$$\frac{\partial F(p, q, t)}{\partial q} = -\{F, p\}$$

Statt p, q (die aus Lagrange-Formel stammen), kann man eine neue Variable benutzen:

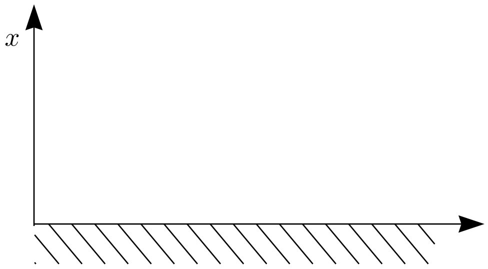
$p_k \mapsto P_j(p, q, t), q_l \mapsto Q_m(p, q, t); p, q$ unabhängig transformiert

Kanonische Transformation:

$\{P_j, Q_m\} = \delta_{jm}$ etc.

Form-Invarianz aller Gleichungen (kanonisch)

Beispiel:



$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + mgx$$

- Alte Variablen: p, x
- Neue Variablen: $P = -x$, $Q = p$

$$\mathcal{H}(P,Q) = \frac{Q^2}{2m} - mgP$$

$\{P,Q\} - \{-x,p\} = -\{p,-x\} = +\{p,x\} = 1$ nach Voraussetzung

3.1 Integrale der Bewegung von Teilchen im Zentralfeld

$\mathcal{H}$, $\vec{L}$, Lenz-Runge, Drehimpuls in z-Richtung

$$\left.\begin{array}{llll} \mathcal{H}, & \vec{L}^2, & L_z, & \{\mathcal{H},\vec{L}^2\}, \{\mathcal{H}, L_z\}, \{\vec{L}^2, L_z\} = 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ P_1, & P_2, & P_3 & \text{mit } \{P_i, P_k\} = 0 \\ Q_1, & Q_2, & Q_3 & \text{finden als kanonische Orte} \end{array}\right\} \text{freies Teilchen in } P, Q$$

Aber wie findet man die Q's?

3. Teilchen im homogenen Magnetfeld

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

Die Newton-Gleichung lautet, wobei e die Ladung des Teilchens ist:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = e \cdot \vec{v} \times \vec{B}}$$

In Theoretischer Physik A hatten wir:

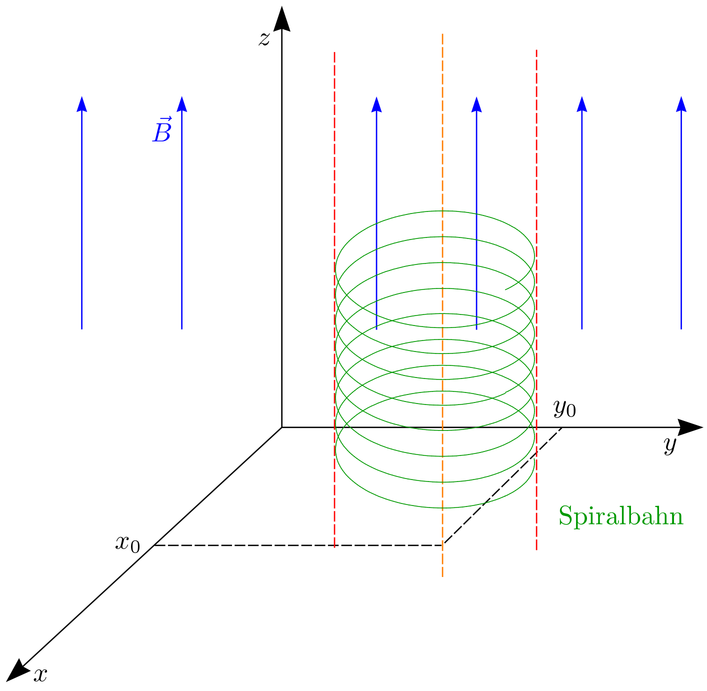
$$\boxed{x = R\cos(\omega_C t - \varphi) + x_0}$$

$$\boxed{y = -R\sin(\omega_C t - \varphi) + y_0}$$

$$\boxed{z = v_{z0} t + z_0}$$

Und außerdem für die Zyklotron-Frequenz:

$$\boxed{\omega_C = \frac{eB_0}{m}}$$



Erhaltungsgrößen:

(Vergleiche Skript Theorie A, Seite 52)

- Impuls in z-Richtung:

  $p_z = m \cdot \dot{z} = mv_{z0}$

- Drehimpuls in z-Richtung:

  $L_z = m\,(x\dot{y} - y\dot{x})\,?$

  $L_z = -mR^2\omega_C - mR\omega_C \cdot (x_0\cos(\omega_C t - \varphi) - y_0\sin(\omega_C t - \varphi))$

  Dies ist nur dann ein Integral der Bewegung, wenn die Spiralachse der z-Achse entspricht, das heißt wenn $x_0, y_0 = 0$ gilt!

- Energie:

  $E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}(R^2\omega_C^2 + v_{z0}^2) = \text{const.}$

Die Lagrange-Funktion lautet:

$$\boxed{\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + e\vec{A}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}}$$

Wir haben beispielsweise:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 x \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\vec{A}(\vec{r})$ das sogenannte „Vektorpotential“. Wir notieren uns außerdem die Hamilton-Funktion:

$$\boxed{\mathcal{H}(\vec{p},\vec{r}) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2}$$

$\vec{p}$ und $\vec{r}$ sind <u>kanonische Variablen</u>.

$$\mathcal{H}(p_x, p_y, p_z, x, y, z) = \frac{1}{2m}\left(p_x - eA_x\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y - eA_y\right)^2 + \dots$$

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{1}{2m}\left(p_x - eA_x\right)\cdot 2$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x - eA_x}{m} \\ \dot{y} &= \frac{p_y - eA_y}{m} \\ \dot{z} &= \frac{p_z - eA_z}{m} \end{aligned}\right\} \text{Hier ist } p \neq m\cdot\dot{\vec{r}}!$$

Für den kinetischen Impuls gilt jedoch:

$$\boxed{\vec{p}_{kin} = m\dot{\vec{r}}}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} &= -\frac{1}{2m}\left(p_x - eA_x(x,y,z)\right)\cdot 2\cdot(-e)\cdot\frac{\partial A(x,y,z)}{\partial x} - \frac{1}{2m}\left(p_y - eA_y\right)\cdot 2\cdot(-e)\cdot\frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial x} + \\ &\quad - \frac{1}{2m}\left(p_z - eA_z\right)\cdot 2\cdot(-e)\cdot\frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{p_x - eA_x}{m}\right] = m\left[\frac{\dot{p}_x}{m} - \frac{e}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_x\right] = \dot{p}_x - e\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_x = \\ &= \underbrace{\frac{p_x - eA_x}{m}\cdot(+e)\cdot\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{p_y - eA_y}{m}\cdot(+e)\cdot\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{p_z - eA_z}{m}\cdot(+e)\cdot\frac{\partial A_z}{\partial x}}_{\dot{p}_x} - e\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_x(x,y,z) \end{aligned}$$

Des weiteren gilt:

$$-e\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_x(x,y,z) = -e\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right]$$

$$m\ddot{x} = e\dot{y}B_z - e\dot{z}B_y$$

$$\boxed{\vec{B} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \dots\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = e\cdot\dot{\vec{r}}\times\vec{B}$$

Nach Newton erhalten wir:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = e\dot{\vec{r}}\times\vec{B} \text{ mit } \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned} x &= R\cos(\omega_C t - \varphi) + x_0 & v_x &= -R\omega_C\sin(\omega_C t - \varphi) \\ y &= -R\sin(\omega_C t - \varphi) + y_0 & v_y &= -R\omega_C\cos(\omega_C t - \varphi) \\ z &= v_{z_0}t + z_0 & v_z &= v_{z_0} \end{aligned}$$

3.2 „Blick über den Zaun“: Bedeutung von $\vec{A}$ und ϕ

$\boxed{\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \ \vec{E} = -\text{grad } \phi}$

Die einhellige Meinung bis ca. 1960 war, daß ϕ und $\vec{A}$ nur Hilfsgrößen sind. Dann erstellten Aharonov und Bolen jedoch folgende Hypothesen:

- $\vec{A}$ beschreibt den Impulsaustausch mit dem Magnetfeld.
- ϕ beschreibt den Energieaustausch mit dem elektrischem Feld.

Ziel:

Das Teilchen im Magnetfeld verhält sich wie ein harmonischer Oszillator. (x-y-Bewegung)

Beispiel einer nichtrelativistischen kanonischen Transformation:

Symmetrische Wahl von $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -\frac{B_0}{2}y \\ \frac{B_0}{2}x \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir lassen die Bewegung in z-Richtung weg, da sie unabhängig von der anderen Bewegung verläuft:

$$\mathcal{H}\underbrace{(p_x, x, p_y, y)}_{\text{4 Variablen}} = \frac{1}{2m}\left(p_x + \frac{eB_0}{2}y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{eB_0}{2}x\right)^2$$

$$v_x = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{1}{m}\left(p_x + \frac{eB_0}{2}y\right)$$

$$v_y = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{1}{m}\left(p_y - \frac{eB_0}{2}x\right)$$

Finde neue Impuls $\vec{P}_j$ und Koordinaten Q_k, so daß aus $\mathcal{H}$ ein harmonischer Oszillator (nur ein Oszillator, obwohl x-y-Bewegung) folgt:

$$\{v_x, v_y\} = \frac{1}{m^2}\left[\left(-\frac{eB_0}{2}\right)\{p_x, x\} + \frac{eB_0}{2}\underbrace{\{y, p_y\}}_{-1}\right] = -\frac{1}{m^2}eB_0 = \text{const.}, \text{ also } \underline{\text{fast}} \text{ kanonisch}$$

Wir wählen kanonische Variablen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= p_y - \frac{eB_0}{2}x \\ Q_1 &= \frac{1}{2}y + \frac{1}{eB_0}p_x \end{aligned}\right\}\{P_1, Q_1\} = 1$$

$$P_1 = m \cdot v_y$$

$$Q_1 = \frac{m}{eB_0}v_x$$

$$\mathcal{H}\underbrace{(P_1, Q_1, P_2, Q_2)}_{\substack{\text{Kanonische} \\ \text{Variablen}}} = \underbrace{\frac{1}{2m}P_1^2 + \frac{m}{2}\omega_C^2 Q_1^2}_{\substack{\text{ein harmonischer} \\ \text{Oszillator}}}$$

$$\left.\begin{aligned} P_2 &= p_y + \frac{1}{2}eB_0 x \\ &\frac{1}{2}y - \frac{1}{eB_0}p_x \end{aligned}\right\}\{P_2, Q_2\} = 1 \text{ und } \{P_1, P_2\} = 0, \{Q_1, Q_2\} = 0$$

P_2, Q_2 sind Erhaltungsgrößen, welche folgende Bedeutung haben:

$P_2 = x_0$

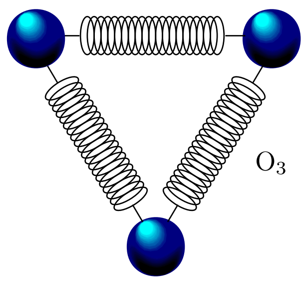
$Q_2 = y_0$

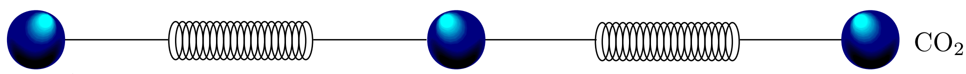
$$x_0 = x - R\cos(\omega_C t - \varphi) = x + \frac{1}{\omega_C} v_y = x + \frac{m}{eB_0}\left(\frac{p_y}{m} - \frac{eB_0}{2m}x\right) = x + \frac{m}{eB_0}\cdot\frac{p_y}{m} - \frac{m}{eB_0}\cdot\frac{eB_0}{2m}\cdot x = x - \frac{1}{2}x + \frac{p_y}{eB_0}$$

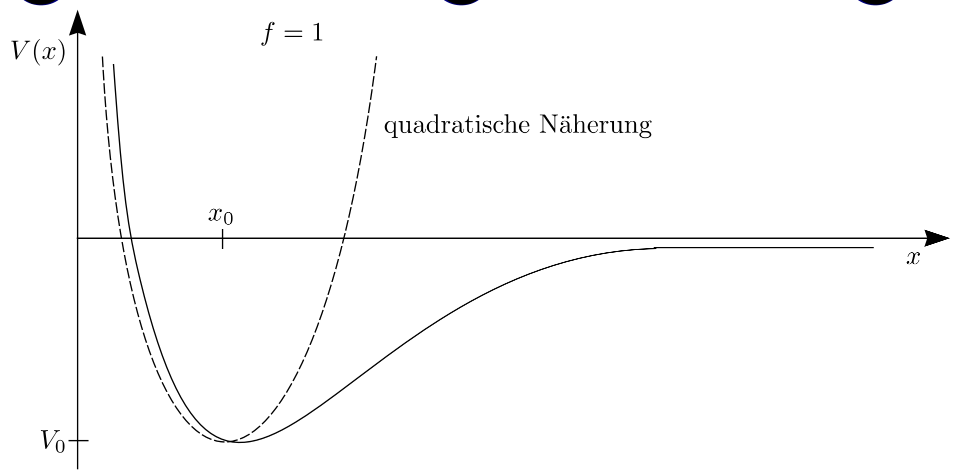
Kapitel 4

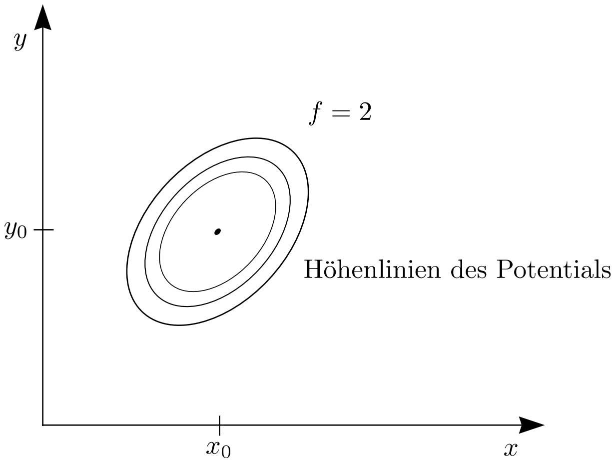
Gekoppelte Oszillatoren

Unser Ziel ist es, Systeme mit mehreren Freiheitsgraden (d.h. N-Teilchen-Systeme) zu beschreiben. Die Bewegungen um die Gleichgewichtslagen werden als klein angenommen (kleine Amplituden). Wir werden uns zuerst den gekoppelten Oszillatoren widmen.









$$V(x_1, x_2, \ldots, x_f) = V(x_1^{(0)}, \ldots) + \underbrace{\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial V(x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_j}\bigg|_{\vec{x}^{(0)}}}_{=0,\text{ da Minimum}} \left(x_j - x_j^{(0)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^{f} \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial^2 V(x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_j \partial x_k}\bigg|_{\vec{x}^{(0)}}}_{C_{jk}} \underbrace{(x_j - x_j^{(0)})}_{u_j} \underbrace{(x_k - x_k^{(0)})}_{u_k} + \ldots$$

$$V(x_1, x_2, \ldots) = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{j,k} C_{jk} u_j u_k$$

$u_j = x_j - x_j^{(0)}$ beschreiben die Auslenkungen aus den Ruhelagen. Diese sind damit generalisierte Koordinaten.

$$C_{jk} = \frac{\partial^2 V(x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_j \partial x_k}\bigg|_{\vec{x}^{(0)}} = C_{kj} \text{ Symmetrie}$$

Es gilt für die Lagrange-Funktion:

$$\boxed{\mathcal{L}(\dot{u}, u) = \frac{1}{2} \sum m_j \dot{u}_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j,k} C_{jk} u_j u_k \qquad u = (u_1, u_2, \ldots)}$$

Bewegungsgleichungen für u_l:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (m_l \dot{u}_l) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{f} C_{lk} u_k - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{f} C_{jl} u_j$$

Da $C_{jl} = C_{lj}$ gilt, setzen wir in der zweiten Summe $C_{jl} = C_{lj}$ und benennen dann j in k um. Das ist der übrigens der Grund, weshalb C_{jk} symmetrisch gewählt werden sollte. Wenn C_{jk} nicht symmetrisch ist, dann erhält man hier eine neue Matrix:

$$\boxed{m_l \ddot{u}_l = -\sum_{k=1}^{f} C_{lk} u_k}$$

Dies sind f Differentialgleichungen 2.Ordnung. Sie sind homogen, linear und haben konstante Koeffizienten. Leider sind sie aber miteinander gekoppelt.

4.1 Feder-Modell

$$V(u_1, u_2) = \frac{1}{2} C (u_2 - u_1)^2 + V_0 = \frac{1}{2} C (u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2)$$

$C_{11} = C$, $C_{22} = C$, $C_{12} = -C$, $C_{21} = -C$

Wir eliminieren die Massen:

$$u_l(t) = \frac{1}{\sqrt{m_l}} a_l(t)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} a_l(t) = -\sum_k \underbrace{\frac{C_{lk}}{\sqrt{m_l m_k}}}_{D_{lk}=D_{kl}} a_k(t)}$$

$l = 1, 2, \ldots, f$: Es handelt sich um f gekoppelte lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

1.) Wenn man beispielsweise $u_l = \frac{1}{m_l} a_l$ setzen würde, so hätte man:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} a_l(t) = -\sum_k \frac{C_{lk}}{m_k} a_k(t) \text{ mit } \frac{C_{lk}}{m_k} = D_{lk}$$

Damit wäre im allgemeinen $D_{lk} \neq D_{kl}$ und $\mathcal{D}$ wäre damit leider nicht mehr symmetrisch.

2.) Die a_l sind wiederum generalisierte Koordinaten.

4.1.1 Matrix-Bezeichnung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_l(t) \\ \vdots \\ a_f(t) \end{pmatrix}}_{\vec{a}} = -\underbrace{\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \ldots & D_{1f} \\ D_{21} & D_{22} & \ldots & D_{2f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{l1} & D_{l2} & \ldots & D_{lf} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{f1} & D_{f2} & \ldots & D_{ff} \end{pmatrix}}_{\mathcal{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_f \end{pmatrix}}_{\vec{a}}$$

Wir bezeichnen wir $\vec{a}$ Vektoren.

Ansatz:

$$a_k(t) = a_k \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

Eigentlich gelte $a_k(t) = \mathrm{Re}\left(a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$. Dann ergibt sich durch Einsetzen und anschließende Division durch $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \neq 0$:

$$(-\mathrm{i}\omega)^2 \vec{a} = -\mathcal{D}\vec{a}$$

$$\boxed{\mathcal{D}\vec{a} = \lambda\vec{a} \text{ mit } \lambda = \omega^2}$$

Es handelt sich um ein Eigenwertproblem mit λ als Eigenwert und $\vec{a}$ als zugehörigen Eigenvektor. Im allgemeinen ist $\mathcal{D}\vec{a} = \vec{b}$ bis auf Faktor λ „Fixpunkt“.

Lineares homogenes Gleichungssystem:

$$(D_{11} - \lambda)a_1 + D_{12}a_2 + \ldots + D_{1f}a_f = 0$$

$$D_{21}a_1 + (D_{22} - \lambda)a_2 + \ldots + D_{2f}a_f = 0$$

$$\vdots$$

$$D_{f1}a_1 + D_{f2}a_2 + \ldots + (D_{ff} - \lambda)a_f = 0$$

Es sind genau f Gleichungen für f Unbekannte $a_1, \ldots, a_f$. Nichttriviale Lösungen ergeben sich nur für spezielle λ. Die Bedingungen für die Bestimmung der Eigenwerte lautet:

$$\boxed{\det(\mathcal{D} - \lambda\mathcal{I}) = 0 \text{ mit der Einheitsmatrix } \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}}$$

Gauß-Algorithmus:

Man bringt das Gleichungssystem auf Dreiecksform durch Addition, Multiplikation von Zeilen mit einem Skalar oder durch Vertauschen derselbigen.

4.1.2 Charakteristisches Polynom

$P_f(\lambda) = \det(\mathcal{D} - \lambda\mathcal{I})$

Nullstellen von $P_f(\lambda) = 0$

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \ldots \quad \lambda_f$

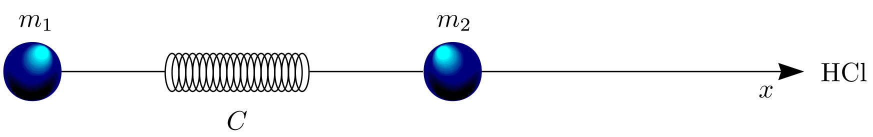
$a^{(1)} \quad a^{(2)} \quad \ldots \quad a^{(f)}$

Frage:

$\boxed{\text{Woher „weiß“ die Mathematik, daß die } \lambda \text{ reell und sogar größer als 0 sind?}}$

Die Eigenvektoren zu <u>verschiedenen</u> λ's sind <u>orthogonal.</u>

Beispiel:



$V(u_1 - u_2) = \frac{C}{2}(u_1 - u_2)^2$

$C_{11} = C, C_{22} = C, C_{12} = C_{21} = -C$

$$\boxed{\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \frac{C}{m_1} & -\frac{C}{\sqrt{m_1 m_2}} \\ -\frac{C}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{C}{m_2} \end{pmatrix}}$$

$\det(\mathcal{D} - \lambda\mathcal{I}) = 0$

$\lambda^2 - (D_{11} + D_{22})\lambda + D_{11}D_{22} - D_{12}^2 = 0$

$\boxed{\lambda_1 = 0}$

$$\boxed{\lambda_2 = C\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}$$

$$a^{(1)} = u_0 \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} \\ \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \text{ und } a^{(2)} = b \begin{pmatrix} -\sqrt{m_2} \\ +\sqrt{m_1} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \text{ mit } \omega = \pm\sqrt{\lambda} = \pm\sqrt{\frac{C}{\mu}}, \text{ wobei } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{u = u_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Re}\left(b \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \\ +\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)}$$

b ist eine komplexe Größe; diese enthält 2 reelle Größen. Das u_0 ist reell. Dies sind nur drei Konstanten, man benötigt aber bei diesem Problem vier. Deshalb führt man die lineare Funktion $u_0 + v_0 t$ ein:

$$u = (u_0 + v_0 t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mathrm{Re}\left(b\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\\ +\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$$

$$V(u_1,u_2) = \frac{1}{2}C(u_2-u_1)^2 = \frac{1}{2}\left(Cu_1^2 + Cu_2^2 - 2Cu_1u_2\right) = \frac{1}{2}\sum_{kl} C_{kl}u_k u_l$$

Es stellt sich hier die Frage, warum wir $\mathcal{C} = \begin{pmatrix}C & -C\\ -C & C\end{pmatrix}$ haben und nicht $\mathcal{C}^\star = \begin{pmatrix}C & -2C\\ 0 & C\end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{aligned} C_{12} &= -2C\\ C_{21} &= 0\end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned} C_{12} &= -C\\ C_{21} &= -C\end{aligned}\right.$$

Dies ist beides richtig, aber $\mathcal{C}^\star$ ist nicht symmetrisch. Mit $C^\star$ würde zwar nach wir vor $V = \frac{1}{2}\sum_{k,l} C^\star_{kl}u_k u_l$ gelten, aber die Bewegungsgleichung (vergleiche Seite 42), würde lauten:

$$m_l\ddot{u}_l = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\left(\varphi^\star_{lk} + \varphi^\star_{kl}\right)u_k$$

Wir spalten nun die $\frac{1}{\sqrt{m_l}}$ ab:

$$m_l\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u_l = -\sum_k C_{lk}u_k$$

$$\mathcal{C}u = \lambda\begin{pmatrix}m_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & m_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & m_f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix}$$

4.1.3 Mathematische Eigenschaften des Eigenwertproblems

Voraussetzung:

$\mathcal{D}$ ist eine symmetrische Matrix, also gilt $D_{ik} = D_{ki}$. Durch Transponieren von $\mathcal{D}$ resultiert $\left(\mathcal{D}^T\right)_{ik} = \mathcal{D}_{ki}$. Die Transponierte erhält man durch Spiegeln von $\mathcal{D}$ an der Diagonale.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_f\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_f)$$

$$\mathcal{D}\vec{a} = \vec{b}$$

$$\vec{a}^T\mathcal{D} = (a_1, a_2, \dots, a_f)\begin{pmatrix}D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1f}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ D_{f1} & D_{f2} & \dots & D_{ff}\end{pmatrix}$$

Satz:

Eigenwerte symmetrischer reeller Matrizen sind reell.

Beweis:

Die Notation „$\star$“ bedeute im folgenden „konjugiert komplex“.

$\mathcal{D}\vec{a} = \lambda\vec{a} \qquad \mathcal{D}\vec{a}^\star = \lambda\vec{a}^\star$

Wir verwenden:

$$\vec{a}^{T\star}\vec{a} = \left(a_1^\star, a_2^\star, \ldots, a_f^\star\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_f \end{pmatrix} = \sum_k a_k^\star a_k = \sum_k |a_k|^2$$

Der letzte Ausdruck ist somit reell!

$$\vec{a}^{\star T}\mathcal{D}\vec{a} = \lambda\underbrace{\vec{a}^{\star T}\vec{a}}_{\text{reell}} \text{ und } \vec{a}^T\mathcal{D}\vec{a}^\star = \lambda^\star\underbrace{(\vec{a}^T\vec{a}^\star)}_{\text{reell}}$$

$$\sum_{kl} a_k^\star \mathcal{D}_{kl} a_l \stackrel{!}{=} \sum_{kl} a_k D_{kl} a_l^\star$$

Wir vertauschen k und l. Dann folgt mit $D_{kl} = D_{lk}$ und anschließender Subtraktion:

$$0 = (\lambda - \lambda^\star)(a^{\star T} \cdot a)$$

Daraus resultiert nun $\lambda = \lambda^\star$ (reell). Alternativ kann man dies auch folgendermaßen zeigen, wobei nun $\star$ „komplex konjugiert und transponiert“ bedeutet:

$$\lambda^\star|\vec{a}|^2 = (\vec{a}^\star\mathcal{D}\vec{a})^\star = \vec{a}^\star\mathcal{D}^\star\vec{a}^{\star\star}$$

Mit $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\star$ erhalten wir dann:

$$\vec{a}^\star\mathcal{D}^\star\vec{a}^{\star\star} = \vec{a}^\star\mathcal{D}\vec{a} = \lambda|\vec{a}|^2$$

Damit ist gezeigt, daß $\lambda = \lambda^\star$ ist. Darüber hinaus gilt:

$$\boxed{(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^T = \mathcal{B}^T \cdot \mathcal{A}^T}$$

Den nötigen Beweis hierzu gibt es auf dem nächsten Übungsblatt.

$$\boxed{(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \cdot \mathcal{C})^T = \mathcal{C}^T\mathcal{B}^T\mathcal{A}^T}$$

Deshalb folgt:

$$\left(\vec{a}^{\star T}\mathcal{D}\vec{a}\right)^T = \vec{a}^T\mathcal{D}^T\left(\vec{a}^{\star T}\right)^T$$

> Die Eigenvektoren zu <u>verschiedenen</u> Eigenwerten $\lambda^{(\alpha)} \neq \lambda(\beta)$ einer symmetrischen reellen Matrix sind <u>orthogonal</u>.

$$\vec{a}^{(\alpha)} \cdot \vec{a}^{(\beta)} = \sum_k a_k^{(\alpha)} a_k^{(\beta)} = 0$$

$$\vec{a}^{T(\alpha)}\vec{a}^{(\beta)} = \left(a_1^{(\alpha)}, \ldots\right)\begin{pmatrix} a_1^{(\beta)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}\vec{a}^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)}\vec{a}^{(\alpha)}, \mathcal{D}\vec{a}^{(\beta)} = \lambda^{(\beta)}\vec{a}^{(\beta)}$$

$$\vec{a}^{T(\beta)}\mathcal{D}\vec{a}^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)}\vec{a}^{T(\beta)}\vec{a}^{(\alpha)} \qquad (1)$$

$$\vec{a}^{T(\alpha)}\mathcal{D}\vec{a}^{(\beta)} = \lambda^{(\beta)} \underbrace{\vec{a}^{T(\alpha)}\vec{a}^{(\beta)}}_{\substack{\text{Skalarprodukt} \\ \text{von } \vec{a}^{(\alpha)} \text{ mit } \vec{a}^{(\beta)}}} \qquad (2)$$

Transponiere Gleichung (1):

$$\vec{a}^{T(\alpha)}\mathcal{D}\vec{a}^{(\beta)} = \lambda^{(\alpha)}\vec{a}^{T(\alpha)} \cdot \vec{a}^{(\beta)} \qquad (3)$$

Subtrahiere Gleichungen (1) und (3) voneinander:

$$0 = \underbrace{\left(\lambda^{(\beta)} - \lambda^{(\alpha)}\right)}_{\neq 0 \text{ nach Voraussetzung}} \underbrace{\vec{a}^{T(\alpha)}\vec{a}^{(\beta)}}_{\Rightarrow = 0}$$

Das charakteristische Polynom hat r-fache Wurzel. Das heißt:

$$P_f(\lambda) = \ldots (\lambda - \lambda_n)^r (\ldots)(\ldots)\ldots$$

Es existieren r linear unabhängige Eigenvektoren, die man nach Schmidt-Verfahren orthogonalisieren kann. In unserem Fall müssen die Eigenwerte ≥ 0 sein, das heißt, $V(u_1, \ldots, u_f)$ hat <u>Minimum</u>.

$$V(u_1, u_2, \ldots, u_f) = \frac{1}{2}\sum C_{kl}u_k u_k \geq 0, \lambda_k \geq 0$$

<u>**Frage:**</u>

In welchen gewählten Koordinaten (Normalkoordinaten) ist $\mathcal{L}$ eine Summe von ungekoppelten harmonischen Oszillatoren?

$q_\alpha = A_\alpha \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\alpha t}$ für freie Schwingung

Wir notieren uns dies in Komponenten:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_1^{(1)}q_1 + a_1^{(2)}q_2 \ldots \\ a_2 = a_2^{(1)}q_1 + a_2^{(2)}q_2 \ldots \\ \vdots \\ a_f = a_f^{(1)}q_1 + a_f^{(2)}q_2 + \ldots \end{array}\right\} \vec{a} = \underbrace{\begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\mathcal{U}} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\mathcal{U}$ ist die Matrix gebildet aus den Spalteneigenvektoren (normierte Eigenvektoren). Dies folgt aus der Festlegung

$$q_1 = a_1^{(1)}a_1 + a_2^{(1)}a_2 + \ldots$$

$$q_2 = a_1^{(2)}a_1 + a_2^{(2)}a_2 + \ldots$$

$$\vdots$$

und außerdem aus $\mathcal{U}^T = \mathcal{U}^{-1}$.

<u>**Eigenschaften von $\mathcal{U}$:**</u>

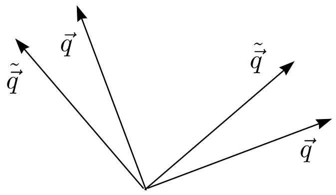
$$\mathcal{U}^T\mathcal{U} = \mathcal{I} \Leftrightarrow a^{(\alpha)} \cdot a^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}$$
$$\mathcal{U}\mathcal{U}^T = \mathcal{I} \Leftrightarrow a^{T(\alpha)} \cdot \alpha^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}$$

Damit ergibt sich also:

$$\boxed{\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^T}$$

Konsequenzen von $\vec{a} = \mathcal{U}\vec{q}$:

$$\vec{a} \cdot \tilde{\vec{a}} = \vec{a}^T \tilde{\vec{a}} = (\mathcal{U} \cdot \vec{q})^T (\mathcal{U}\tilde{\vec{q}}) = \vec{q}^T \underbrace{\mathcal{U}^T \mathcal{U}}_{\mathcal{I}} \tilde{\vec{q}} = \vec{q}^T \vec{q}$$



Beim Skalarprodukt von $\vec{a}$, $\tilde{\vec{a}} \mapsto q$, $\tilde{q}$ bleiben Längen und Winkel erhalten. Daraus folgt, daß $\mathcal{U}$ Drehungen und Spiegelungen beschreibt. $\mathcal{U}$ ist eine orthogonale Matrix, daher ist die Spiegelung eine orthogonale Transformation, womit wir also haben:

$$\frac{1}{2} \sum_k \dot{a}_k^2 = \frac{1}{2} \dot{a}^T \dot{a} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{q}$$

Weiterhin gilt:

$$\sum_{kl} a_k D_{kl} a_l = \vec{a}^T \mathcal{D} \vec{a} = \vec{q}^T \underbrace{\mathcal{U}^T \mathcal{D} \mathcal{U}}_{\tilde{\mathcal{D}}} \vec{q} = \sum \lambda_\alpha q_\alpha^2$$

$\tilde{\mathcal{D}}$ hat Diagonalform.

$$\tilde{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha^2 - \frac{1}{2} \omega_\alpha^2 q_\alpha^2$$

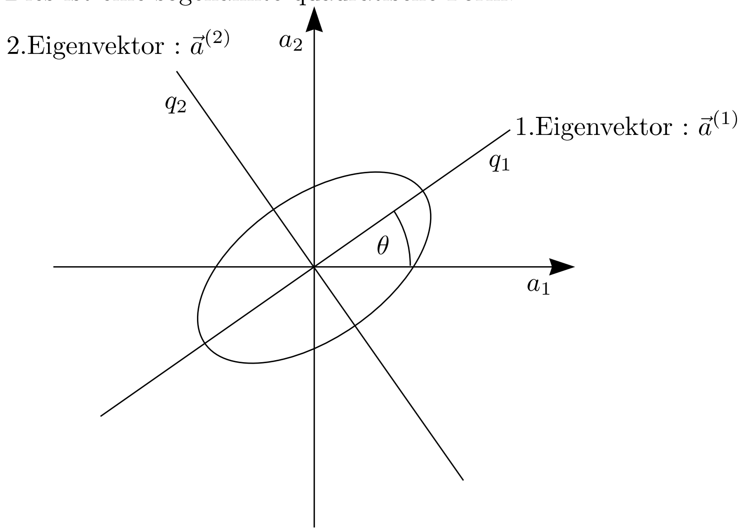
Es handelt sich somit um f ungekoppelte Oszillatoren. Die q_k's nennt man Normalkoordinaten („Modes“).

Beispiel (qualitativ):

Für eine (2,2)-Matrix gilt:

$$V = \frac{1}{2} \left(D_{11} a_1^2 + D_{22} a_2^2 + \underbrace{2 D_{12} a_1 a_2}_{\text{Kopplung}} \right)$$

Dies ist eine sogenannte quadratische Form.

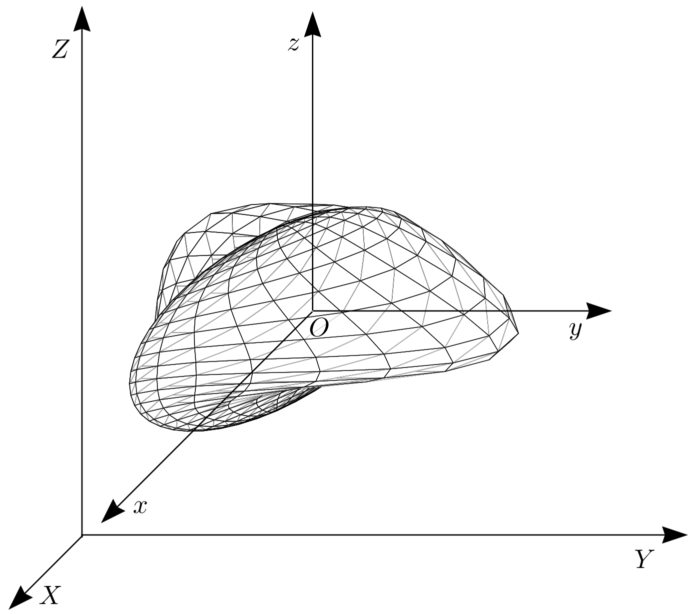


$$V = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2\right)$$

Kapitel 5

Bewegungen des starren Körpers

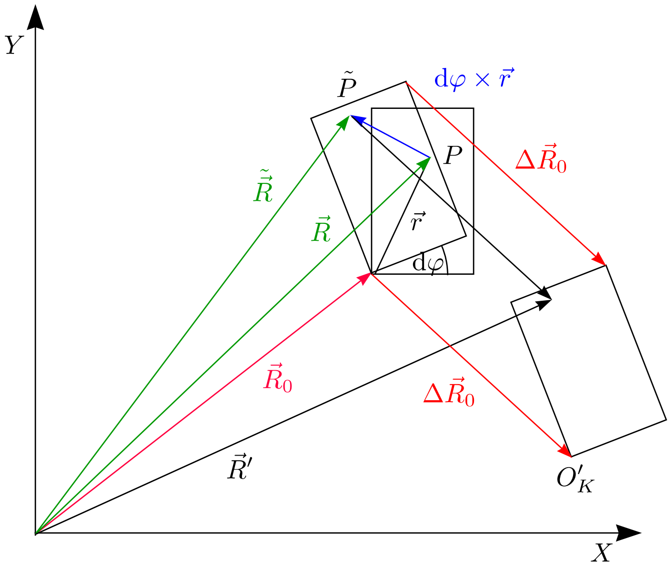
5.1 Winkelgeschwindigkeit, Freiheitsgrade



- K_R und X, Y, Z raumfest
- K_K und x, y, z körperfest

Freiheitsgrade:

- 3 Translationsfreiheitsgrade (von O_K bezüglich K_K)
- 3 Rotationsfreiheitsgrade (Winkel α, β und γ)



- Drehung um O: $\Delta\vec{\varphi}$ ist parallel zur Drehachse ($\mathrm{d}\varphi \approx \Delta\varphi$)
- Translation um $\Delta\vec{R}_0$
- Insgesamt haben wir folgende Größen:
  - $\vec{R}' = \vec{R} + \Delta\vec{\varphi} \times \vec{r} + \Delta\vec{R}_0$
  - $\vec{R}_0 \mathrel{\hat{=}}$ Ausgangslage
  - $\vec{r} \mathrel{\hat{=}}$ Im körperfesten Koordinatensystem
  - $\Delta\vec{R}_0 \mathrel{\hat{=}}$ Translation des starren Körpers

$\Delta\vec{R} = \vec{R}' - \vec{R} = \Delta\vec{\varphi} \times \vec{r} + \Delta\vec{P}_0$

$$\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} \times \vec{r} + \frac{\Delta\vec{R}_0}{\Delta t}$$

$\Delta t \mathrel{\hat{=}}$ Zeit für Bewegung: $\vec{R} \mapsto \vec{R}'$

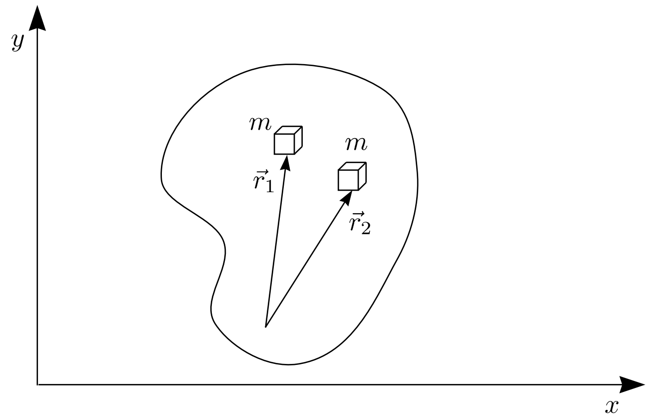
$$\boxed{\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{V}_0}$$

Dies ist die Geschwindigkeit eines Punktes des starren Körpers vom raumfesten System aus.

$|\vec{\Omega}| \mathrel{\hat{=}}$ Winkelgeschwindigkeit, Richtung von $\vec{\Omega}$: Drehachse

$\vec{V}_0 \mathrel{\hat{=}}$ Translationsgeschwindigkeit von O_K

5.2 Energie



$$E_{kin} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \vec V_n^2$$

$$\vec V^2 = \left(\vec V_0 + \vec\Omega \times \vec r\right)^2 = \vec V_0^2 + 2\vec V_0 \cdot \left(\vec\Omega \times \vec r\right) + \left(\vec\Omega \times \vec r\right)^2 = \vec V_0^2 + 2\left(\vec V_0 \times \vec\Omega\right) \cdot \vec r + \Omega^2 r^2 \sin^2\varphi$$

$$\Omega^2 r^2 \sin^2\varphi = \Omega^2 r^2 - \Omega^2 r^2 \cos^2\varphi = \Omega^2 r^2 - \left(\vec\Omega \cdot \vec r\right)^2$$

$$E_{kin} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \vec V_n^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_n m_n\right)}_{M \text{ (Gesamtmasse)}} \vec V_0^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\vec V_0 \times \vec\Omega\right) \underbrace{\sum_n m_n \cdot \vec r_n}_{M \cdot \vec r_s} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_n m_n \left[\vec\Omega^2 \vec r_n^2 - \left(\vec\Omega \cdot \vec r_n\right)^2\right]}_{\text{Rotationsnergie}}$$

Wie wählen den Ursprung des körperfesten Koordinatensystems im Schwerpunkt, so daß die Kopplung zwischen Translation und Rotation verschwindet!

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n \left[(\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2)(x_n^2 + y_n^2 + z_n^2) - (\Omega_x x_n + \Omega_y y_n + \Omega_z z_n)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{kl \\ k=1,2,3 \\ \Leftrightarrow x,y,z}} I_{kl} \Omega_k \Omega_l$$

Da der Körper rotiert, ändern sich laufend die Vektoren $\vec r_k$. Der Trägheitstensor I_{kl} ist deswegen ebenfalls zeitabhängig.

$$I_{xx} = \sum_n m_n \left(x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 - x_n^2\right) = \sum_n m_n \left(y_n^2 + z_n^2\right)$$

$$I_{xy} = -\sum_n m_n \left(x_n \cdot y_n\right) = I_{yx}$$

$$y^2 + z^2 = \varrho_x^2$$

ϱ_x ist der Abstand von der x-Achse.

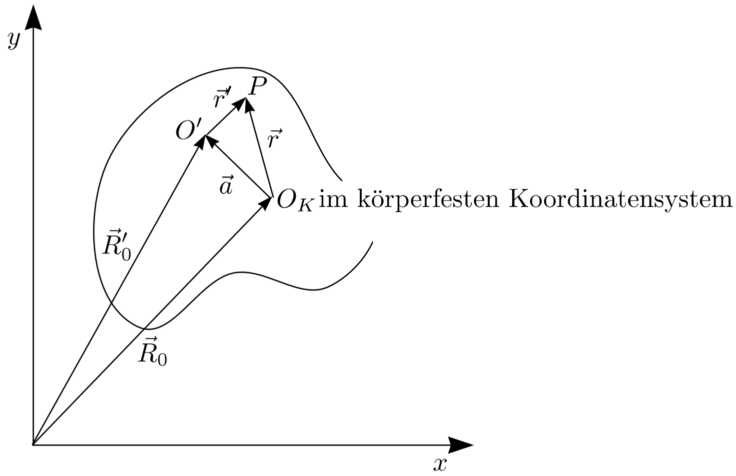
$$\boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} \Omega^T \cdot \mathcal{I} \cdot \Omega}$$

Ω ist der Spaltenvektor der Rotationsgeschwindigkeit. Bei $\mathcal{I}$ handelt es sich um eine 3×3-Matrix $(I_{xx}, I_{xy}, \ldots)$, nämlich der sogenannten Trägheits(-matrix). $\vec\Omega$ hängt <u>nicht</u> von der Wahl des körperfesten Koordinatensystems ab.

- ✷ Im Koordinatensystem K_R:

  $$\boxed{\vec V = \vec V_0 + \vec\Omega \times \vec r}$$

✳ Im Koordinatensystem K'_K:



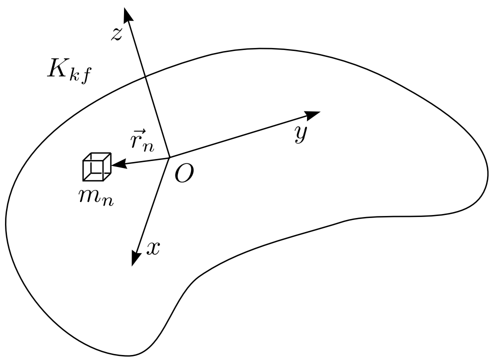
Für alle Punkte P gilt $\vec{V} = \vec{V}'$.

$$\boxed{\vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r} = \vec{V}'_0 + \vec{\Omega}' \times \overbrace{(-\vec{a} + \vec{r})}^{\vec{r}'}}$$

$$\vec{V}_0 + \underbrace{\left(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}'\right) \times \vec{r}}_{\substack{\text{Funktion}\\ \text{von } \vec{r}}} = \underbrace{\vec{V}'_0 - \vec{\Omega} \times \vec{a}}_{\substack{\text{Konstant}\\ \text{bezüglich } \vec{r}}}$$

Daraus ergibt sich dann $\Omega = \Omega'$ und $\vec{V}_0 = \vec{V}'_0 - \vec{\Omega} \times \vec{a}$.

$$E_{kin} = \sum \frac{1}{2} m_n (\vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}_n)^2 = \frac{M}{2}\vec{V}_0^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot M(\vec{v}_0 \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{r}_s + \frac{1}{2}\sum_{kl} I_{kl}\Omega_k\Omega_l$$



Die Energie ergibt sich als Summe aus Translationsenergie des Schwerpunkts und Rotationsenergie um Schwerpunkt. Für den Drehimpuls gilt:

$$\vec{L} = \sum_n m_n \left(\vec{R}_0 + \vec{r}_n\right) \times \left(\vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}_n\right) =$$
$$= \vec{R}_0 \times (M\vec{V}_0) + \sum_n m_n \vec{R}_0 \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_n) + \sum_n m_n \vec{r}_n \times \vec{V}_0 + \sum_n m_n \vec{r}_n \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_n)$$

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{R}_0 \times (M\vec{V}_0)}_{\substack{\text{Bahn-Drehimpuls}\\ \text{des Körpers}}} + \underbrace{\vec{R}_0 \times (\vec{\Omega} \times M\vec{r}_s) + M\vec{R}_s \times \vec{V}_0}_{\substack{\text{Verschwindet, wenn}\\ \text{Schwerpunkt im Ursprung } O_K}} + \sum_n m_n \vec{r}_n \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_n)$$

$$\vec{L}_k = \vec{R}_0 \times (M \cdot \vec{V}_0)\Big|_k + \sum_l I_{kl}\Omega_l$$

$k, l = 1, 2, 3\,(x, y, z)$

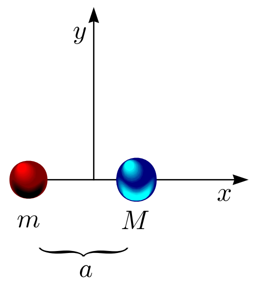
Im allgemeinen ist $\vec{L}$ nicht parallel zu $\vec{\Omega}$, selbst wenn $\vec{V}_0 = \vec{o}$. $\mathcal{I}_{kl}$ besteht aus 9 Größen und ist außerdem symmetrisch ($\mathcal{I}_{kl} = \mathcal{I}_{lk}$). Es gibt somit nur 6 unabhängige Größen! Da $\mathcal{I}_{kl}$ symmetrisch ist, existiert außerdem ein Koordinatensystem, in dem $\mathcal{I}$ diagonal ist.

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$I_1, I_2, I_3 \mathrel{\hat{=}}$ Hauptträgheitsmomente (Hauptachsensystem)

Wie findet man das Hauptachsensystem?

- Irgendein Koordinatensystem im Schwerpunkt (nicht erforderlich!)
- $\mathcal{I}\vec{a} = \lambda\vec{a}$ (Eigenwertproblem)
- $I_{1,2,3} \mathrel{\hat{=}} \lambda_{1,2,3}$ $\quad \vec{a}^{(1)}, \vec{a}^{(2)}, \vec{a}^{(3)}$ (Richtungen der Koordinatenachsen)



Es handelt sich um punktförmige Massen.

$$I_{xx} = 0$$

$$I_{yy} = I_{zz} = m_{red}a^2$$

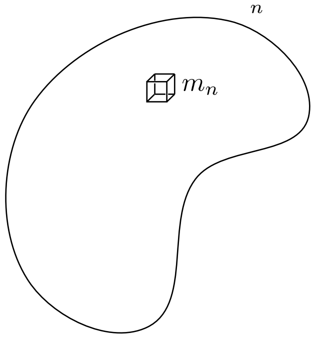
Bei mathematischen Pendel ist die kinetische Energie gleich:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\underbrace{ml^2}_{I}\dot{\varphi}^2$$

Für das Zweikörperproblem haben wir:

$$E_{kin} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L_z^2}{2\underbrace{mr^2}_{I}}}_{\text{PotentielleEnergie}}$$

Wie berechnet man $\sum_n m_n \cdot \left(y_n^2 + z_n^2\right)$?

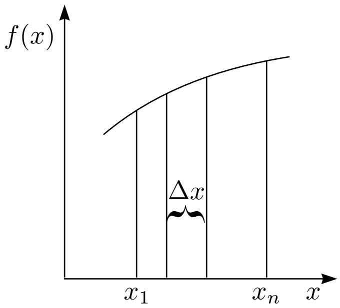


$$m_n \mathrel{\hat{=}} \Delta m_n$$

Man bildet den Grenzwert für N (Anteil der Moleküle) $\mapsto \infty$ und erhält somit ein Volumenintegral.

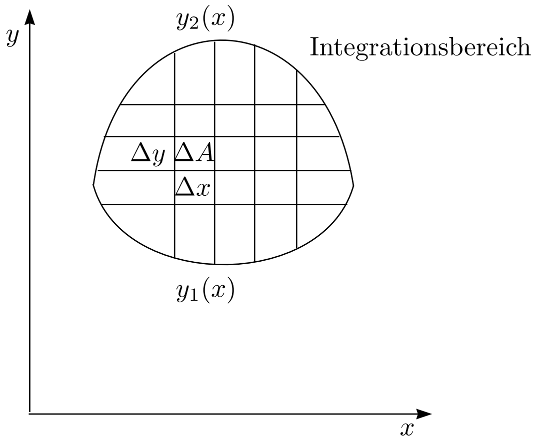
$$\lim_{N \mapsto \infty} \sum_{n=1}^{N} f(x_n, y_n, z_n) \cdot \Delta V_n$$

$$\Delta m_n = \underbrace{\frac{\Delta m_n}{\Delta V}}_{\rho(\vec{r})} \cdot \Delta V \text{ mit } \rho(\vec{r}) \mathrel{\hat{=}} \text{Massendichte}$$



5.3 Mathematischer Einschub: Mehrfachintegrale

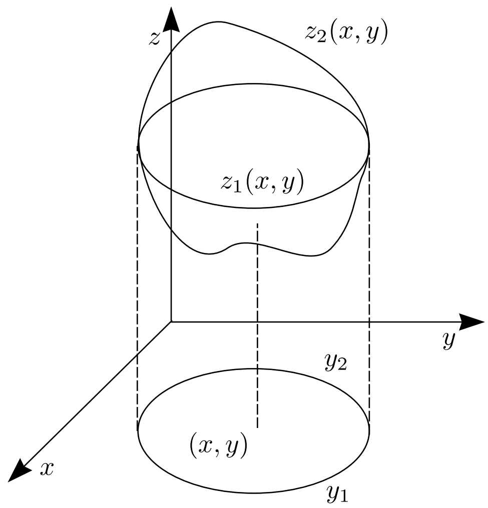
5.3.1 Flächenintegral



$$\lim_{N \mapsto \infty} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{f(x_n, y_n)}_{z} \Delta x \cdot \Delta y = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) \, \mathrm{d}y \right)}_{x=\text{const.}} \mathrm{d}x$$

So erhält man das Volumen unter $z = f(x,y)$ über dem Integrationsbereich B.

5.3.2 Volumenintegral

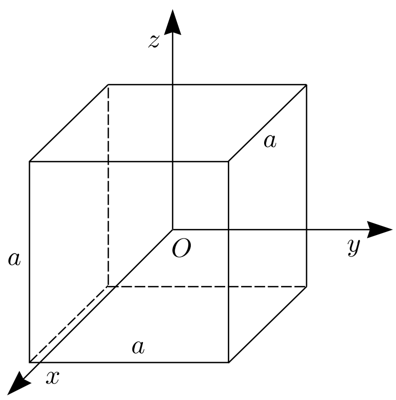


$$\lim_{N\mapsto\infty}\sum_n f(x_n,y_n,z_n)\cdot\Delta x\Delta y\Delta z=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

Problem:

Finde die Integrationsgrenzen $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, x_1, x_2.

5.4 Trägheitsmoment eines Würfels



$$I_{xx}=\iiint\frac{M}{a^3}\cdot\left(y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\frac{M}{a^3}\cdot\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}\,x\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}y\underbrace{\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}z(y^2+z^2)}_{y^2\cdot z+\frac{1}{3}z^3}=y^2\cdot z+\frac{1}{3}z^3\bigg|_{z=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}=\frac{1}{6}Ma^2$$

$$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\frac{1}{6}Ma^2$$

$$I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0$$

$$\boxed{\mathcal{I}=\frac{Ma^2}{6}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

Drehung um beliebige Achse mit $\vec{\Omega}$:

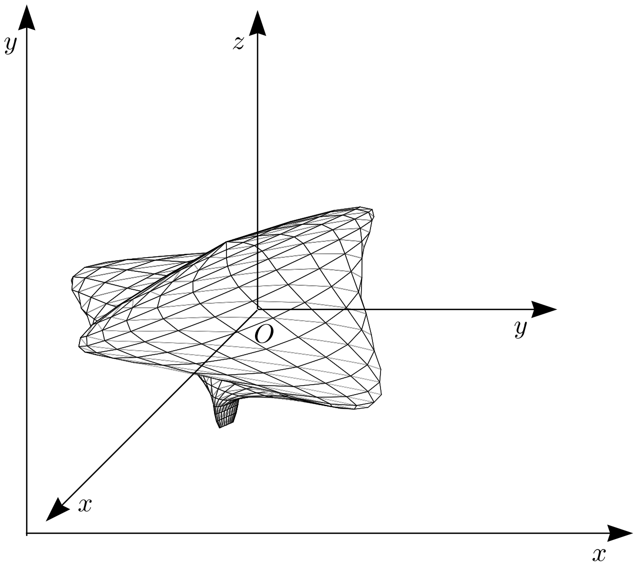
$E_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}^T \cdot \mathcal{I} \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2}\sum_{kl} I_{kl}\Omega_k\Omega_l = \frac{1}{2}\mathcal{I}\vec{\Omega}^2$ für jede Richtung

$\vec{L} = \mathcal{I} \cdot \vec{\Omega}$

Würfel und Kugel sind bezüglich der Rotation gleich. Speziell für die Kugel gilt:

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}MR^2$

5.5 Bewegungsgleichungen des (freien) starren Körpers



$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}^{ext} \stackrel{!}{=} 0$ (Kraft)

$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}^{ext} \stackrel{!}{=} 0$ (Drehung)

- Körperfestes Koordinatensystem: Im Schwerpunkt
- Raumfestes Koordinatensystem: Körper ruht

Bewegungsgleichung analog Massenpunkt $m \cdot \dot{v} = 0$
Im raumfesten und körperfesten Koordinatensystem gilt:

$L = I\Omega$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

- Raumfestes Koordinatensystem (vertikal):

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right)_{rf} = 0, \text{ aber } \left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)_{rf} \neq 0$$

- Körperfestes Koordinatensystem: (<u>nicht</u> vertikal):

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right)_{kf}, \text{ aber } \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

Es gilt:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{rf} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{kf} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Und außerdem haben wir analog:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{R}_0}{\mathrm{d}t} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

Wir betrachten nun L_x, wobei wir voraussetzen, daß der Trägheitstensor im körperfesten Koordinatensystem Diagonalgestalt hat:

$$\left(\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}\right)_{rf} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_1\Omega_x\right)_{kf} + (\vec{\Omega} \times \vec{L})_{x\text{-Komponente}} \stackrel{!}{=} 0$$

Wir nehmen nun an, daß das körperfeste Koordinatensystem ein Hauptachsensystem ist.

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Also folgt nun:

$$I_1\dot{\Omega}_x + \Omega_y \underbrace{L_z}_{I_3\Omega_z} - \Omega_z \underbrace{L_y}_{I_2\Omega_y} = 0$$

Die Bewegungsgleichungen des freien starren Körpers lauten folglich:

- $I_1\dot{\Omega}_x = (I_2 - I_3)\Omega_y\Omega_z$
- $I_2\dot{\Omega}_y = (I_3 - I_1)\Omega_z\Omega_x$
- $I_3\dot{\Omega}_z = (I_1 - I_2)\Omega_x\Omega_y$

Ω_1, Ω_2 und Ω_3 sind die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit bezüglich des körperfesten Koordinatensystems. Eigentlich noch Winkel α, β, γ des körperfesten relativ zu raumfesten Koordinatensystem (Mehr im Fließbach)

Spezialfälle:

- $I_1 = I_2 = I_3$ (Kugel, Würfel)

  $\vec{\Omega} = \text{const.}$

- $I_1 = I_2 \neq I_3$

  $\Omega_3 = \text{const.}$

  $$\dot{\Omega}_1 = \underbrace{\left[\frac{I_2 - I_3}{I_1}\Omega_3\right]}_{=\text{const. }(\omega_2)} \cdot \Omega_2$$

  $$\dot{\Omega}_2 = \underbrace{\left[\frac{I_3 - I_1}{I_2}\Omega_3\right]}_{=\text{const. }(-\omega_2)} \cdot \Omega_1$$

  Daraus folgen nun die einfachen linearen Differentialgleichungen:

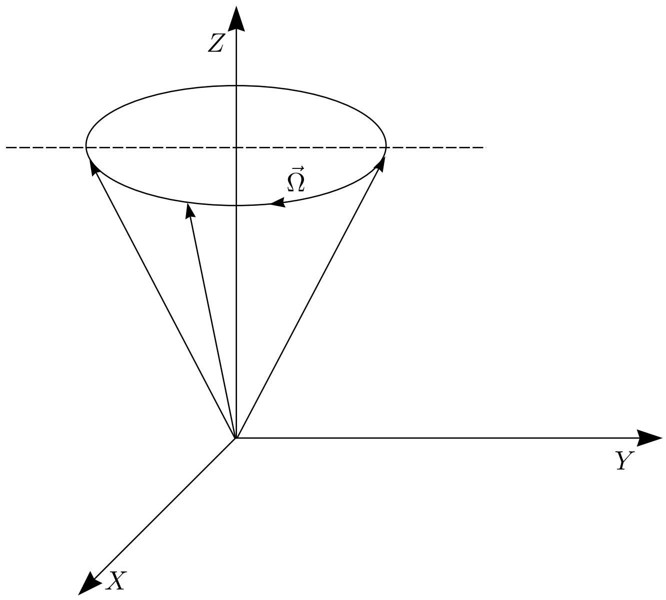
  $$\left.\begin{array}{l} \dot{\Omega}_1 = \omega_L \cdot \Omega_2 \\ \\ \dot{\Omega}_2 = -\omega_L \cdot \Omega_1 \end{array}\right\} \ddot{\Omega}_1 = -\omega_L^2\Omega_1 \Rightarrow \ddot{\Omega}_1 + \omega_L^2\Omega_1 = 0$$

Die Lösungen sind somit:

$$\boxed{\Omega_1(t) = a \cdot \cos(\omega_L t + \varphi)}$$

$$\boxed{\Omega_2(t) = -a \cdot \sin(\omega_L t + \varphi)}$$

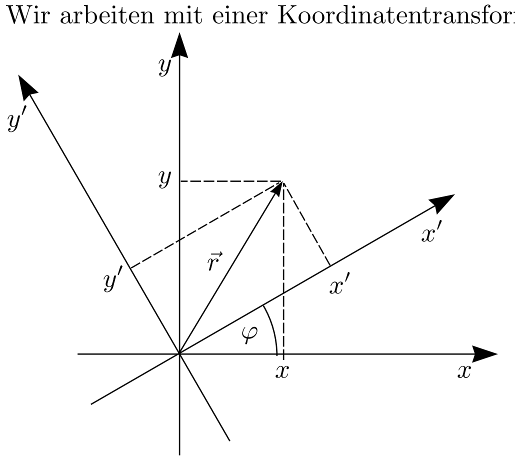
$$\boxed{\Omega_3(t) = b}$$



Dies bezeichnet man als Larmor-Präzession, nach dem Physiker Larmor, der sich mit diesem Problem intensiv auseinandergesetzt hat.

5.6 Mathematischer Einschub: Skalare, Vektoren, Tensoren

Wir arbeiten mit einer Koordinatentransformation, die den Ursprung O festhält (Drehungen, Spiegelungen):



$$\vec{r} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{K} \text{ oder } \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{K'}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ +\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{U}, \mathcal{U}\mathcal{U}^T = \mathcal{I}} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

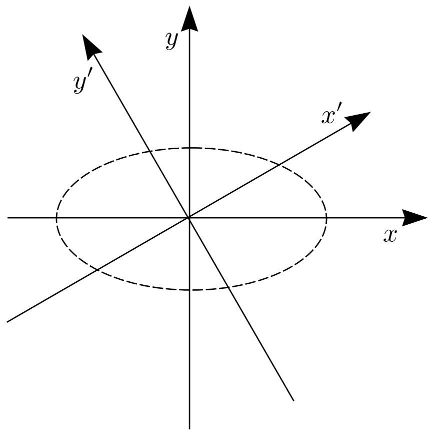
Skalar:

$\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$

Die Werte von ϕ, ϕ' sind gleich, haben aber eventuell andere Form wie beispielsweise:

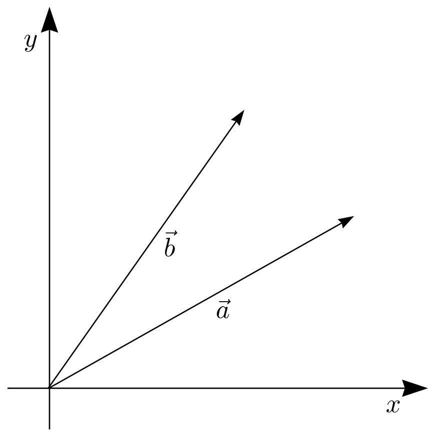
$\phi(x, y) = x^2 + 2y^2$

$\phi'(x', y') = \frac{3}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 + x'y'$



Invarianz, aber keine Forminvarianz

Vektor:



$\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ (Werte-Tripel)

Die Komponenten von $\vec{V}$ werden wie die Komponenten der Ortsvektoren transformiert. Die Länge von Vektoren $\vec{a}$,$\vec{b}$ und der Winkel zwischen ihnen bleibt invariant.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{a}' \cdot \vec{b}' = (a_1', a_2', a_3') \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix} = \vec{a}^T \cdot \vec{b}$

Dies wird folgendermaßen bewiesen:

$\vec{a} = \mathcal{U} \cdot \vec{a}'$

$\vec{b} = \mathcal{U} \cdot \vec{b}'$

$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = (\mathcal{U}\vec{a}')^T(\mathcal{U}\vec{b}') = \vec{a}^T \underbrace{\mathcal{U}^T\mathcal{U}}_{\mathcal{I}} \vec{b}'$

Tensor:

Es sei $\mathcal{T}_{kl}$ eine $N \times N$-Matrix. Dann ist diese invariant:

$\vec{a}^T \mathcal{T} \vec{b} = \text{Zahl} = \vec{a}'^T \mathcal{T}' \vec{b}'$ mit $\mathcal{T}' = \mathcal{U}^T \mathcal{T} \mathcal{U}$

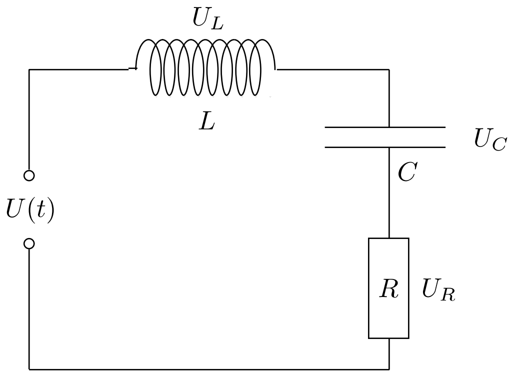
Transformationsverhalten der Matrixelemente eines Tensors 2.Stufe

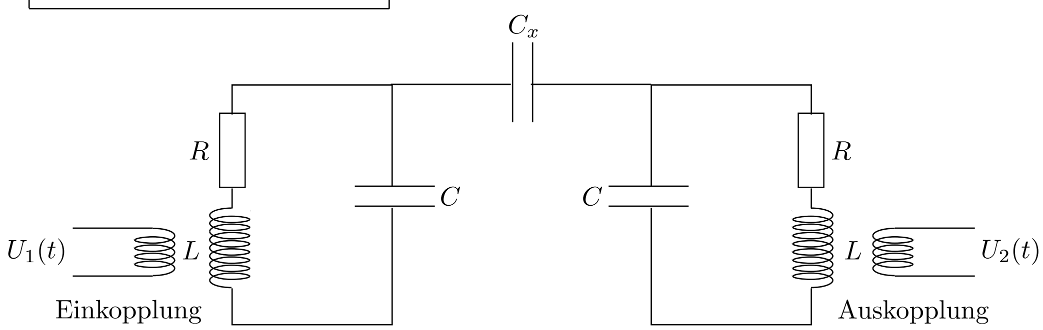
- Tensor 0.Stufe: Skalar
- Tensor 1.Stufe: Vektor
- Tensor 2.Stufe: $\mathcal{T}_{kl}$
- Tensor 3.Stufe: $\mathbf{T}_{klm}$
  Diese sind aber leider etwas komplizierter in der Notation.

5.7 Harmonischer Oszillator als Lineares System

$f(t)$ (Input) $\Rightarrow$ $\boxed{m\left(\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x\right) = f(t)}$ $\Rightarrow$ $x(t)$ (Output)

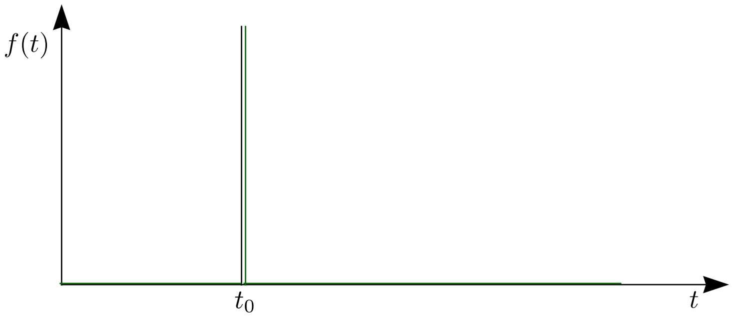
Beispiel:

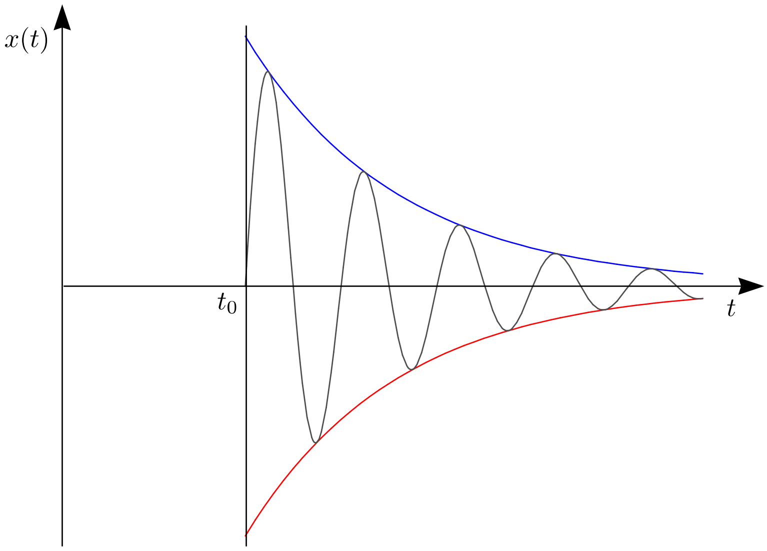




Unser Ziel ist es, $x(t)$ für <u>beliebige</u> $f(t)$ zu berechnen. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor:

- <u>1.Schritt:</u> Impulsförmige Kraft ($x(t) \equiv 0$ für $f(t) \equiv 0$, $x(t) \mapsto 0$ für $t \mapsto \infty$)





Für den Impulsübertrag Δp gilt $f(t) = (\Delta p) \cdot \delta(t - t_0)$.

- $t > t_0$:

  $$x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)} \cdot \sin\left[\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}(t - t_0)\right]$$

- $t < t_0$:

  $$x(t) \equiv 0$$

Wie hängt A mit der Stärke des Kraftimpulses zusammen?

- Anfangsgeschwindigkeit:

  $$v_0 = A \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

- Anfangsimpuls:

  $$mv_0 = \int f'(t')\,\mathrm{d}t'$$

Die Dirac-Funktion ist folgendermaßen definiert:

$\delta(t) \neq 0$ außerhalb $t = 0$

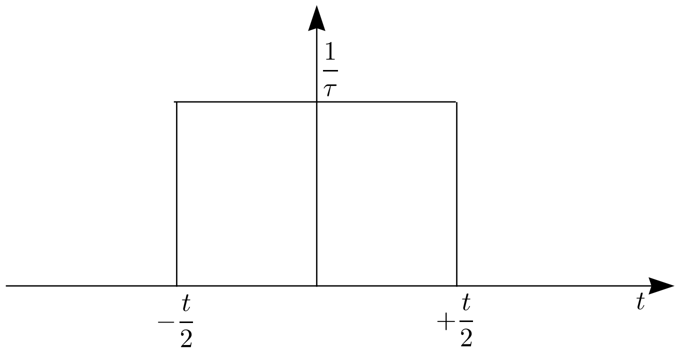
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\delta_\tau(t) \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\tau} & \text{für} \quad |t| < \dfrac{\tau}{2} \\[2ex] 0 & \text{für} \quad |t| > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$\delta_\tau(t) = \frac{1}{\tau\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right]$$

Der Grenzwert für $\tau \mapsto 0$ existiert im mathematischen Sinne <u>nicht</u>. Physikalisch gesehen ist τ eine sehr kleine Zeit. Nach dem Mittelwertsatz ergibt sich, wenn man δ_τ, wie oben definiert, zugrunde legt:

$$\underbrace{\lim_{\tau \mapsto \infty} \int f(t')\delta_\tau(t'-t_0)\,\mathrm{d}t'}_{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t')\delta(t'-t_0)\,\mathrm{d}t'} = f(t_0)$$



Symmetrie: $\delta(t) = \delta(-t)$

* <u>2.Schritt:</u>

$$f(t) = \int f(t_0)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t_0$$

Lösung zu $\underbrace{f(t_0)}_{\Delta p} \cdot \delta(t-t_0)$ ist $x(t) = f(t_0)\cdot g(t,t_0)$

$$\boxed{g(t,t_0) = \frac{1}{m}\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)} \frac{\sin\left[\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-t_0)\right]}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} \cdot \theta(t-t_0)}$$

Dies gilt auch für den aperiodischen Grenzfall und überdämpften Fall. Wir erhalten nun die Lösung für beliebige $f(t)$, wobei wir die Linearität der Differentialgleichung ausnutzen:

Superposition: $\boxed{x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t,t')\,\mathrm{d}t'}$

- Homogenität der Zeit: $g(t,t') = g(t-t')$
- Kausalität von $x(t)$ und $f(t)$: $g(t,t') \equiv 0$ für $t' > t$
- $f(t) = f_0\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left[f_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$

  $$x(t) = \mathrm{Re}\left[f_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\cdot G(\omega)\right]$$

  $$G(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\bar{t}}\,\mathrm{d}\bar{t} \qquad (t-t'=\bar{t})$$

  Mit der <u>Fouriertransformation</u> folgt:

  $$G(\omega) = G_1(\omega) = +\mathrm{i}G_2(\omega) = A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\omega)}$$

$x(t) = f_0 A(\omega)\cos(\omega t - \phi)$

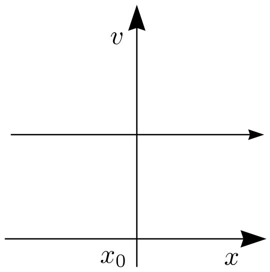
Die Fourier-Transformation ist (fast) selbstreziprok.

$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

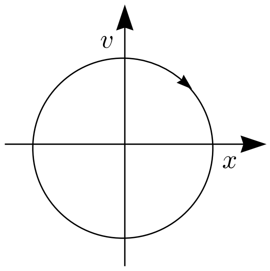
5.8 Dynamische Systeme, Klassifikation der Bahnen im Phasenraum

Wir haben ein eindimensionales mechanisches System, das aus einem Teilchen besteht:

- Zustand $\hat{=}$ (x, v) oder (x, p):



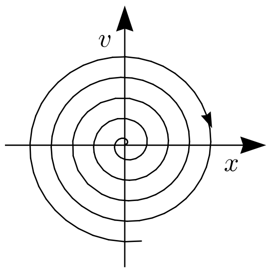
- Freies Teilchen:



Ungedämpfter harmonischer Oszillator:

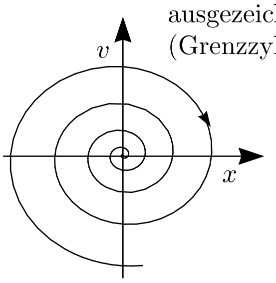
$x = A\cos(\omega t - \varphi)$

$y = A\omega\sin(\omega t - \varphi)$



- Gedämpfter harmonischer Oszillator: Ursprung ist ATTRAKTOR

ausgezeichnete periodische Bahn
(Grenzzyklus)



$\ddot{x} - 2\gamma\dot{x}(1 - x^2) + \omega_0^2 x = 0$

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = 2\gamma v(1 - x^2) - \omega_0 x$$

Bahnen im Phasenraum schneiden sich NICHT! Wir betrachten ein allgemeines dynamisches System:

$\dot{x}_k(t) = f_k(x), x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Bei f handelt es sich um einen n-dimensionalen Vektor. Im Gegensatz zur Mechanik darf n auch 1, 3, 5 sein. (Mechanik: $n = 2$ ($x_1 = x, x_2 = v$) etc., $n = 4$)

- Logistische Gleichung für $n = 1$:

  $\dot{P}(t) = (\alpha - \beta P)P$

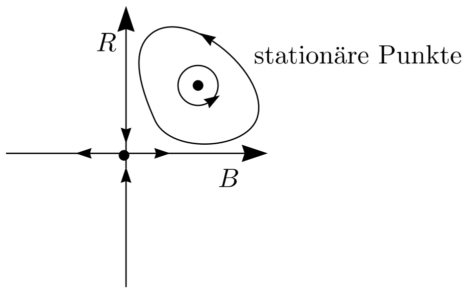
  $P \triangleq$ Verknappung von Ressourcen

- Räuber-Beute $n = 2$:

  $\dot{B} = (\alpha - \beta R)B$

  $\dot{R} = (-\gamma + \delta B)R$

  Hier haben wir nun zwei nicht linear gekoppelte Differentialgleichungen.

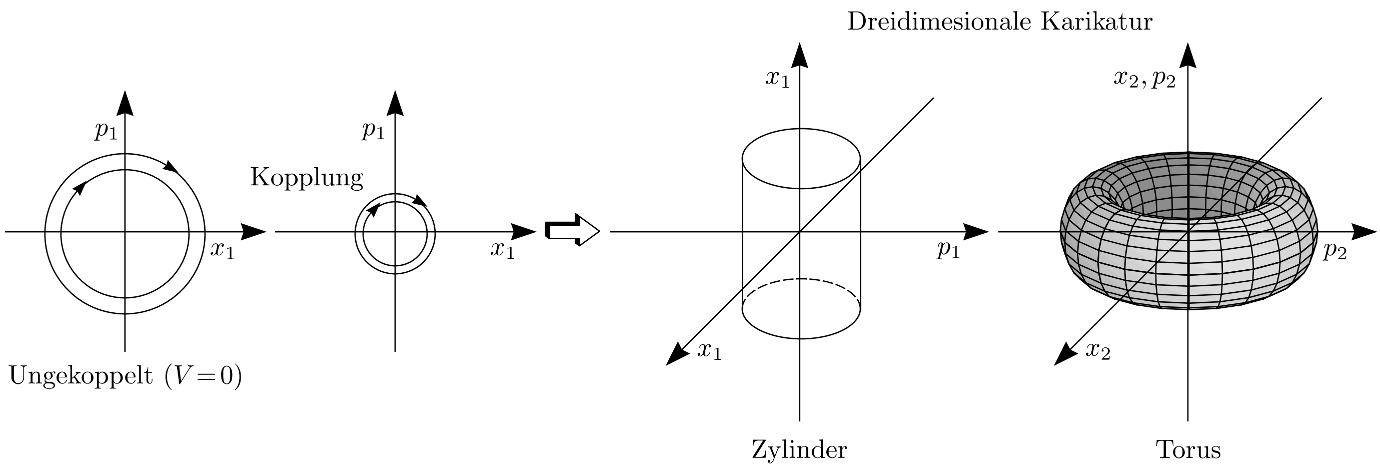


  - Stationäre Punkte: $\dot{R} = \dot{B} = 0$
  - Kleine Abweichung: $B = B_0 + \Delta B, R = R_0 + \Delta R$, ΔB, ΔR sei klein

5.8.1 2 gekoppelte Oszillatoren $n = 4$

$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + V(x_1, x_2)$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - \frac{1}{3}x_2^3$



Poincaré-Schnitt des 4d-Raumes mit $x_2 = 0$ und $p_2 > 0$