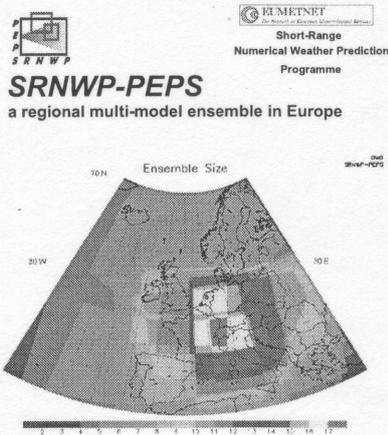


Country	LAM	Res.[km]	GM
Denmark	HIRLAM	16	ECMWF
Finland	HIRLAM	22	ECMWF
Ireland	HIRLAM	16	ECMWF
Netherlands	HIRLAM	22	ECMWF
Spain	HIRLAM	22	ECMWF
Norway I	HIRLAM	11	ECMWF
Norway II	HIRLAM	22	ECMWF
Sweden I	HIRLAM	11	ECMWF
Sweden II	HIRLAM	22	ECMWF
Belgium	ALADIN	15	ARPEGE
Austria	ALADIN-A	9.6	ARPEGE
France	ALADIN-F	11	ARPEGE
Croatia	ALADIN-L	8.9	ARPEGE
Czech Rep.	ALADIN-L	11	ARPEGE
Hungary	ALADIN-L	11	ARPEGE
Slovakia	ALADIN-L	11	ARPEGE
Slovenia	ALADIN-L	9.5	ARPEGE
UK I	UKMO-LAM	12	UM global
UK II	UKMO-EU	12	UM global
Germany	LME	7	GME
Schweiz	alMo	7	ECMWF
Italy	Euro LM	7	EuroHIRM
Poland	LM	14	GME



Dynamische Gleichungen des LM

- Ausgangspunkt: Eulergleichungen

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho g \vec{k} - 2\vec{\Omega} \times (\rho \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{t}} \quad \vec{\bar{t}} \text{ Spannungstensor}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

Kontinuitätsgleichungen für die Partialmassen

$$\frac{dq^x}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}^x + J^x \quad \begin{array}{l} \vec{J}^x \text{ Diffusionsfluss} \\ J^x \text{ Quellen, Senken} \\ x=d \text{ für trockene Luft, } x=v \text{ für Dampf,} \\ x=l \text{ für flüssiges Wasser, } x=i \text{ für Eis, ..} \end{array}$$

Dynamische Gleichungen LM - 2

Gleichung für die inneren Energie

$$\rho \frac{de}{dt} = p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_e + \vec{R}) + \varepsilon$$

\vec{J}_e Diffusionsfluss innere Energie
 \vec{R} Strahlungsfluss
 ε Dissipation kinetischer Energie

Zustandsgleichung

$$\frac{1}{\rho} = (R_d q^d + R_v q^v) \frac{T}{p} + \frac{1}{\rho_l} q^l + \frac{1}{\rho_i} q^i + \dots \quad R_d, R_v \text{ Individuelle Gaskonstanten}$$

$\alpha \cdot 10^{-5}$
 ↑
 Wird vernachlässigt

Näherung für die Zustandsgleichung

$$\frac{1}{\rho} = (R_d q^d + R_v q^v) \frac{T}{p}$$

Dynamische Gleichungen von LM - 3

Verallgemeinerte virtuelle Temperatur

Massenerhaltung

$$\sum_x q^x = 1 \text{ oder } q^v = 1 - \sum_{x \neq v} q^x$$

Daraus folgt

$$p = \rho R_d \left(1 + \left(\frac{R_v}{R_d} - 1 \right) q^v - q^l - q^i \right) T$$

Virtuelle Temperatur

$$T_v = \left(1 + \left(\frac{R_v}{R_d} - 1 \right) q^v - q^l - q^i \right) T$$

Zustandsgleichung

Dynamische Gleichungen vom LM - 4

Bestimmung der Temperatur aus den 1. Hauptsatz in Enthalpie-Form

$$H = E + pV$$

Totales Differential

$$dh = de - \frac{p}{\rho} d\rho + \frac{1}{\rho} dp$$

Eingesetzt in 1. Hauptsatz ergibt

$$\rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} - \bar{\nabla} \cdot (\bar{J}_h + \bar{R}) + \varepsilon$$

Temperaturgleichung aus Enthalpie

$$h = h(T, p, q^x) = \sum_x h_x q^x$$

Totales Differential

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p, q^x} dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T, q^x} dp + \sum_x \left(\frac{\partial h}{\partial q^x} \right) dq^x$$

Mit der Annahme eines Gemisches idealer Gase gilt dabei

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p, q^x} = c_p = \sum_x c_{p,x} q^x$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T, q^x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial q^x} \right)_{p, T} = h_x = h_x^0 + c_{p,x} (T - T_0)$$

Temperaturgleichung

Einsetzen in linke Seite der Enthalpiegleichung

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt} + I_v I' + I_s I' - \bar{\nabla} \cdot (\bar{J}_s + \bar{R}) - \sum c_{p,x} \bar{J}^x \cdot \bar{\nabla} T + \varepsilon$$

Mit sensiblen Wärmefluss

$$\bar{J}_s = \bar{J} - \sum h_x \bar{J}_x$$

Umwandlungswärmen (temperaturabhängig)

$$I_v = L_v - (c_{pv} - c_{pp})(T - T_0)$$

$$I_s = L_s - (c_{ps} - c_{pp})(T - T_0)$$

$$I_r = L_r - (c_{pr} - c_{pp})(T - T_0)$$

Prognostische Gleichung für den Druck

Die Temperaturgleichung enthält noch eine zeitliche Ableitung des Drucks. Dies würde die Lösung des Gleichungssystems erheblich erschweren. Mit Zustandsgleichung und Kontinuitätsgleichung kann das System vereinfacht werden.

Ableitung der Zustandsgleichung nach der Zeit:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \rho R_d T \frac{d\alpha}{dt} + \rho R_d (1 + \alpha) \frac{dT}{dt}$$

mit

$$\alpha = \left(\frac{R_v}{R_d} - 1 \right) q^v - q' - q^f$$

Eliminieren der zeitlichen Ableitungen mit Temperatur- und Kontinuitätsgleichungen

Prognostische Gleichung für den Druck

$$\left[1 - (1 + \alpha) \frac{R_d}{R_v}\right] \frac{dp}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + (1 + \alpha) \frac{R_d}{c_p} Q_h + Q_m$$

mit Wärmequellen

$$Q_h = I'_{s'} + I'_{sd} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_s + \vec{R}) - \sum c_{pk} \vec{J} \cdot \vec{\nabla} T + \varepsilon$$

und Dichteänderungen durch Phasenumwandlungen

$$Q_m = \rho R_d T \frac{d\alpha}{dt} = -R_v T (I' + I) - R_v T \vec{\nabla} \cdot \vec{J} - R_d T \vec{\nabla} \cdot \vec{J}'$$

Zusammenfassung:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{c_p}{c_v} p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) Q_h + \frac{c_p}{c_v} Q_m$$

Zusammenfassung: Gleichungssystem von LM

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\vec{\nabla} p + \rho g \vec{k} - 2\vec{\Omega} \times (\rho \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{c_p}{c_v} p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) Q_h + \frac{c_p}{c_v} Q_m \\ \rho c_p \frac{dT}{dt} &= \frac{dp}{dt} + Q_h \\ \rho \frac{dq^*}{dt} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + I' \\ \rho &= \frac{p}{R_d(1 + \alpha) T} \end{aligned}$$

Schallwellen

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\vec{\nabla} p + \rho g \vec{k} - 2\vec{\Omega} \times (\rho \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{c_p}{c_v} p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) Q_h + \frac{c_p}{c_v} Q_m \\ \rho c_p \frac{dT}{dt} &= \frac{dp}{dt} + Q_h \\ \rho \frac{dq^*}{dt} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + I' \\ \rho &= \frac{p}{R_d(1 + \alpha) T} \end{aligned}$$

Schallwellen

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} p \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{c_p}{c_v} p_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\ \rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned}$$

Reynoldsmittelung der Gleichungen

- Gleichungen beschreiben Kontinuumsmechanik
- Approximation durch finite Differenzen
 - Gitterpunktwerte repräsentativ für Volumenelement und Zeitschritt
- Begriffe:
 - Ensemble-Mittel
 - Reynolds-Mittel
 - Hesselberg-Mittel

Definition der Mittelungsoperatoren

- Anwendung Beschreibung turbulenter Strömungen
 - Trennung zwischen mittlerer Strömung und turbulentem Anteil
 - Charakterisierung des turbulenten Zustands einer Strömung durch Momente einer Erwartungsfunktion
 - Ensemble-Mittel über viele Realisierungen der Strömung
 - Approximation des Ensemble-Mittels durch räumliche und/oder zeitliche Mittelungsoperatoren

Definition der Mittelungsoperatoren

- Anwendung: numerische Simulation der Strömung
 - Trennung von (räumlich und zeitlich) aufgelösten und nicht aufgelösten Skalen
 - Mittelwerte und die davon abweichenden Fluktuationen sind Funktionen des Ortes und der Zeit

Mittelungsoperator

$$\bar{\psi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int_{r, t}^{r+\Delta V, t+\Delta t} \psi dV' dt'$$

Rechenregeln

$$\begin{cases} \psi = \bar{\psi} + \psi' \\ \bar{\psi}' = 0 \\ \overline{\psi' \phi'} \neq 0 \\ \overline{\bar{\psi} \phi'} = 0 \end{cases}$$

Reynolds- und Hesselberg-Mittel

Reynolds-Mittel: Anwendung des Mittelungsoperators auf die Variable: $\bar{\psi}$

Hesselberg-Mittel: Masse gewichtetes Mittel: $\hat{\psi} = \frac{\rho \bar{\psi}}{\bar{\rho}}$

Es gilt analog: $\psi = \hat{\psi} + \psi''$
 $\overline{\psi''} = 0$

Anwendung auf Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0$

Reynolds-Mittel,

Zerlegung der Variablen: $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, $\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}'$

Einsetzen in Kontinuitätsgleichung und Mittelung

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} + \rho')(\bar{\vec{v}} + \vec{v}') = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{\vec{v}}) + \overline{\rho' \vec{v}'} = 0$$

Alternativ mit Nutzung des Hesselberg-Mittel

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} + \rho')(\bar{\vec{v}} + \vec{v}') = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \hat{\vec{v}}) = 0$$

Diskussion

- Hesselberg-Mittel führt offensichtlich zu einfacheren Gleichungen
 - Genauer: Vereinfachung bei Anwendung auf Produkte mit Dichte und Geschwindigkeit und bei allen massenbezogenen Größen
 - Bei allen anderen Variablen wird Reynolds-Mittel angewendet
 - Anwendung des Hesselberg-Mittels ist hier notwendig, da keine Boussinesq-Approximation

Diskussion

- Reynold-Mittel und Hesselberg-Mittel sind experimentell nicht einfach zu unterscheiden, Mittelungsoperator ist meist durch das angewendete Messverfahren vorbestimmt.
 - Bestimmung der Windgeschwindigkeit aus Impulsfluss führt in der Regel zu einem Hesselberg-Mittel (z.B. Schalenkreuz, Staurohr)
 - Direkte Messung der Geschwindigkeit führt zu Reynolds-Mittel (trägheitsfreie Messverfahren wie Ultraschallanemometer)
- Unterscheidung ist hier nicht weiter von Relevanz.

Gleichungen in Flussform

Um Hesselberg-Mittelungsoperator anwenden zu können, müssen die Gleichungen in Flussform gebracht werden. Dazu wird die Kontinuitätsgleichung verwendet.

$$\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \bar{v} \cdot \bar{\nabla} \psi \right) + \psi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{v} \right) = \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{v} \psi, \text{ mit } \psi = v, T, q^s, \dots, \psi \neq \rho, p$$

Nach Anwendung auf alle Gleichungen und Mittelung ergibt sich

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{\psi}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\rho} \bar{v} \bar{\psi} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\rho} \bar{v}' \psi' = \dots$$

Der rechte Term ist die Divergenz des turbulenten Flusses, der parametrisiert werden muss.

Damit ergibt sich ein neuer Operator für die gemittelte totale zeitliche Ableitung:

$$\frac{\widehat{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \cdot \bar{\nabla} \quad \text{oder} \quad \bar{\rho} \frac{\widehat{d}}{dt} \psi = \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \psi + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{v} \psi)$$

Anwendung der Mittelungsoperatoren

- Hesselberg-Mittel wird auf den Geschwindigkeitsvektor und alle massenbezogenen Größen angewendet
- Reynolds-Mittel wird auf alle übrigen Größen angewendet wie Dichte, Druck usw., nicht jedoch auf Temperatur, da diese proportional zur Enthalpie als massenbezogene Größe ist

Gleichungssystem von LM

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \vec{v} &= -\vec{\nabla} v p + \rho \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times (\rho \vec{v}) - \vec{\nabla} \bar{T} \\ \frac{d}{dt} p &= \frac{-c_p p}{c_v} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) Q_b \\ \rho \frac{d}{dt} T &= \frac{d}{dt} p + Q_b \\ \rho \frac{d}{dt} q^i &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{F}^i - (f + f^i) \\ \rho \frac{d}{dt} q^{i'} &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{p}^{i'} + \vec{F}^{i'} + f^{i'}) \\ \rho &= \frac{p}{R_d \left(1 + \frac{R_v}{R_d} - 1 \right) \left(q^i - \hat{q}^i - q^{i'} \right) \hat{T}} \end{aligned}$$

Koordinatensystem

- Formulierung des Problems auf einer Kugel
 - Polarkoordinaten
- Ausschnittsmodell für jedes beliebige Gebiet auf der Erde anwendbar
 - Rotiertes Koordinatensystem
 - Äquator im Modellgebiet (LME: in der Mitte)
 - Nullmeridian im Modellgebiet (LME: in der Mitte)

Approximationen

- Geoid wird durch eine Kugeloberfläche angenähert
- Die Atmosphäre ist flach im Vergleich zum Erdradius

$$\begin{aligned} r &= a + z \approx a \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Wenn a der Erdradius ist

Transformation

Ausgangspunkt kartesisches Koordinatensystem

- Z-Achse (0,0,z) ist die Drehachse der Erde
- (0,0,a) ist der Nordpol im kartesischen System

gedrehtes System

- Nordpol $(\varphi_g^N, \lambda_g^N, a)$
- Rotation hat nur einen Einfluss auf die Coriolisterme
 - Newton'sche Gesetze sind invariant gegenüber Verschiebungen und Drehungen

Coriolisterme im gedrehten Koordinatensystem

- Coriolisparameter

$$f = 2 \Omega \left(\cos(\varphi_g^N) \cos(\varphi) \cos(\lambda) + \sin(\varphi) \sin(\varphi_g^N) \right)$$

Umrechnungen der Koordinaten

Geographische Koordinaten in rotierte Koordinaten

$$\varphi = \arcsin \left(\sin(\varphi_g) \sin(\varphi_g^N) + \cos(\varphi_g) \cos(\varphi_g^N) \cos(\lambda_g - \lambda_g^N) \right)$$

$$\lambda = \arctan \left(\frac{\cos(\varphi) \sin(\lambda_g - \lambda_g^N)}{\cos(\varphi_g) \sin(\varphi_g^N) \cos(\lambda_g - \lambda_g^N) - \sin(\varphi_g) \cos(\varphi_g^N)} \right)$$

Umkehrung: rotierte Koordinaten in geographische Koordinaten

$$\varphi_g = \arcsin \left(\sin(\varphi) \sin(\varphi_g^N) + \cos(\varphi) \cos(\lambda) \cos(\lambda_g^N) \right)$$

$$\lambda_g = \arctan \left(\frac{\cos(\varphi) \sin(\lambda)}{\sin(\varphi_g^N) \cos(\varphi) \cos(\lambda) - \sin(\varphi) \cos(\varphi_g^N)} \right)$$

Umrechnung der Geschwindigkeitskomponenten

mit
$$\delta = \arctan \left(\frac{\cos(\varphi) \sin(\lambda)}{\cos(\varphi_g^N) \sin(\varphi) \cos(\lambda) - \cos(\varphi) \sin(\varphi) \sin(\varphi_g^N)} \right)$$

$$u = u^g \cos(\delta) + v^g \sin(\delta) \quad u^g = u \cos(\delta) - v \sin(\delta)$$

$$v = -u^g \sin(\delta) + v^g \cos(\delta) \quad v^g = u \sin(\delta) + v \cos(\delta)$$

Vertikalkoordinate

- Gelände folgend
- Vertikale Gitterweiten als Tabelle vorgebar
- Vorteil: einfache Formulierung der Randbedingungen am Boden
- Nachteil: numerische Fehler bei steilem Gelände
 - Glättung der Orographie erforderlich
 - (es gibt auch eine experimentelle Version mit z-Koordinate)

$$z = f(x, y, \xi)$$

$$\xi = m(\xi)$$

$$\sqrt{G} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi}$$

Verikalkoordinate

- Darstellung der Erdoberfläche $\xi = konst$
- Die Funktion m „dehnt“ das Koordinatensystem, um vertikal unterschiedliche Auflösungen zu erhalten
 - Hohe Auflösung in Bodennähe in der Grenzschicht
 - Operationall: unterste Schicht oberhalb der Erdoberfläche in 10 m über Grund
 - Niedrigere Auflösung am Oberrand des Modellgebietes