

Mikrometeorologie

Mitschrieb
SS 2005

2. Januar 2006

Vorwort:

Es handelt sich hier um einen Tafelmitschrieb der Vorlesung Mikrometeorologie, gehalten von Herr H. Zimmermann im Sommersemester 2005. Dieses Skript hat keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit, enthält jedoch die wichtigsten Züge der Vorlesung. Somit erklären sich z.B. die enthaltenen Kapitelsprünge. Dennoch sollte es in anschaulicher Form die Vorlesungsinhalte wiedergeben und als Nachschlagewerk dienen.

Inhaltsverzeichnis

1.1	Skalenanalyse; Bewegungen (atmosphärische Bewegungen ↔ Bewegungen in der Atmosphäre)	1
1.2	Mikrometeorologie	1
1.3	Vorlesungsinhalt	2
1.4	Atmosphärische Grenzschicht	2
1.5	Eigenschaften der atmosphärischen Grenzschicht	2
1.6	Eigenschaften der atmosphärischen Grenzschicht	3
1.7	Prandtl-Schicht	4
2.0	Energiebilanz einer Fläche	5
2.1	Glieder der Energiebilanz	6
2.2	Formen der Energiebilanzgleichung	6
2.3	Fluß-Gradient-Gleichungen	7
2.4	Typische Energiebilanz-Momentaufnahmen	7
2.5	Energiebilanzterme im Tagesgang	9
2.10	Eulersche Zerlegung	11
2.11	Energiebilanz und Advektion	12
2.12	Energiebilanz in der Praxis	13
2.13	Interne Grenzschicht	13
2.14	Blending height - Konzept	14
3.0	Strahlungsbilanz	16
3.1	Strahlung, Wellenlängenbereiche	16
3.2	Strahlungsarten	16
3.3	Strahlungsbilanz R_N	17
4.0	Bodentemperaturen und Bodenwärmestrom	20
4.3	Phänomene	20
4.4	Thermische Bodeneigenschaften	21
4.5	Bodenwärmestrom	22
5.0	Möglichkeiten der Bestimmung des Bodenwärmestroms	22
5.1	Wärmeleitungsgleichung	23
5.2	Tautochronenmethode	23
5.3	Ermittlung von Bodeneigenschaften mit Hilfe der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung	28
5.3.1	Schwingungen (unvollständig)	28
5.3.2	Analytische Lösung der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung	29
5.4	Wärmestromplatten (heat flux plates)	32
7.2	Kinematische Flußdichten	42
8.1	Windgeschwindigkeits-Profile	43

1.1 Skalenanalyse; Bewegungen (atmosphärische Bewegungen ↔ Bewegungen in der Atmosphäre)

1. Zeitskala

- Bruchteil einer Sekunde bis mehrere Monate.
- Def. Zeitskala: Zeit, in der ein beobachteter Vorgang typischerweise abläuft.

2. Raumskala

Def. Raumskala: Längenbereich, der für das betrachtete Phänomen typisch ist.

Einteilung:

Mikroskala → lokale Skala

Mesoskala → regionale Skala

Makroskala → globale Skala

3. Skala nach Orlanski

Makroskala α :	> 10.000km	(allg. Zirkulation, lange Wellen)
Makroskala β :	2.500 - 10.000km	(Hoch-, Tiefdruckgebiet)
Mesoskala α :	250 - 2.500km	(Fronten, Trop. Zyklone)
Mesoskala β :	25 - 250km	(Land-/ Seewind, orographische Effekte)
Mesoskala γ :	2,5 - 25km	(Gewitterzellen, Stadteffekte)
Mikroskala α :	250m - 2,5km	(Konvektionsprozesse, Tornados)
Mikroskala β :	25 - 250m	(Thermikprozesse, Staubteufel)
Mikroskala γ :	< 25m	(kleinräumige Turbulenzen)

1.2 Mikrometeorologie

Befasst sich mit Prandtl-, Ekman- und Grenzschicht.

Die Wechselwirkungen von Bodenschicht und Prandtl-schicht.

Betrachtung des Strahlungsumsatzes.

Def. zu Oberflächen- / Geländeformen

Oberflächenform: Als Summe der Reliefs.

Relief: Gesamtheit der kontinentalen und submarinen Erdoberflächenformen.

Def. Neigung

Angabe in Prozent und zwar Höhendifferenz z zur Horizontaldistanz x (Steigung = z/x).

Def. Exposition

Ausrichtung eines Hanges oder einer anderen Reliefform in Bezug auf Sonneneinstrahlung, Wind, Regen.

Oftmals wird in Bezug auf Sonneneinstrahlung geachtet.

1.3 Vorlesungsinhalt

Betrachtung von Prozessen, die an der Schnittstelle Erde / Atmosphäre ablaufen bzw. initiiert werden und zwar während eines Tages und deren vertikale Erstreckung maximal die Prandtlschicht umfassen.

1.4 Atmosphärische Grenzschicht

1. Grenzschicht

Schicht eines Fluides (Gase, Flüssigkeiten) über einer materiellen Fläche, die von der Fläche beeinflusst wird.

In der Grenzschicht finden die bedeutenden Austauschvorgänge von Impuls, Wärme und Masse zwischen Fluid und materieller Fläche statt. Infolge dessen sind in der Grenzschicht auch deutliche Änderungen der Eigenschaften des Fluides zu finden, z.B.

$$\vec{v} = \vec{v}_{(z)}, T = T_{(z)}, C = C_{(z)}$$

2. Atmosphärische Grenzschicht

Synonyme: planetare Grenzschicht
planetary boundary layer (PBL)

Jeder Bereich der Atmosphäre, der über Zeitskalen, die von wenigen Stunden bis zu einem Tag reichen, mit der unterliegenden Fläche (Land, Wasser) in Wechselwirkung steht. Der Einfluss des Untergrundes macht sich bei Zeitskalen von bis zu einem Tag immer nur bis zur Obergrenze der atmosphärischen Grenzschicht bemerkbar, (bei längeren Zeitskalen werden entsprechend größere Höhen, die über die Grenzschicht hinausgehen, beeinflusst).

1.5 Eigenschaften der atmosphärischen Grenzschicht

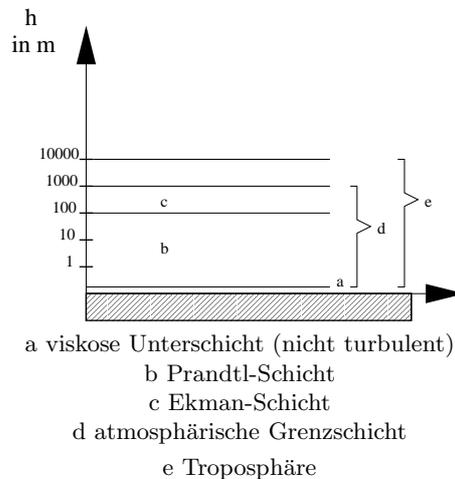
Aufbau:

1. Unbewachsener, homogener, horizontaler Untergrund \Rightarrow

- viskose Unterschicht (mm Bereich)
- Prandtl-Schicht (Dekameter Bereich)
- Ekman-Schicht (outer layer)

2. bewachsener / bebauter, horizontaler, homogener Untergrund \Rightarrow

- Rauigkeitsschicht
- Prandtl-Schicht
- Ekman-Schicht



1.6 Eigenschaften der atmosphärischen Grenzschicht

1. Entstehung:

Als Konsequenz der Wechselwirkung zwischen Atmosphäre und Erdoberfläche (Land, Wasser) während Zeiträumen bis zu einem Tag.

2. Schichtdicke:

Variiert über Land über weite Bereiche von mehreren Dekametern bis mehrere Kilometer. Die großen Mächtigkeiten der Grenzschicht werden nur tagsüber erreicht (Strahlungswetterlage vorausgesetzt).

Nachts (ebenfalls Strahlungswetterlage) kühlt die Erdoberfläche durch langwellige Ausstrahlung sehr stark ab, wodurch die Konvektion (Vertikalbewegung von Luftpaketen) unterbunden wird \leftrightarrow nächtliche Grenzschicht von unten her aufgebaut wird. (Dekameter Bereich)

3. Verschmutzung:

Atmosphärische Grenzschicht ist generell stärker verschmutzt als die darüber liegende Luft der freien Atmosphäre.

In der Literatur, die sich mit Luftverschmutzung befasst, wird die Grenzschicht meist als Mischungsschicht bezeichnet.

4. Sonstige Eigenschaften der Grenzschicht:

- Grenzschicht durch Inversion (Temperaturzunahme mit der Höhe) nach oben hin abgeschlossen.
- Grenzschicht meist turbulent, vor allem in der Prandtl-Sicht.

5. Grenzschichtdicke bei schönem Wetter:

- Nach Sonnenaufgang Aufheizung der Landoberfläche, daraus folgt Erwärmung der Luft nahezu ausschließlich vom Boden her \Rightarrow Grenzschicht bildet sich aus.
- Maximale vertikale Erstreckung wird am späten Nachmittag erreicht.

- Am späten Abend und während der Nacht baut sich dann ausstrahlungsbedingt, die stabile nächtliche Grenzschicht vom Boden her auf. (Größenordnung 100m)
- Stabile nächtliche Grenzschicht. Stabil geschichtet, darüber liegende Luftschicht vollkommen entkoppelt.

Potentielle Temperatur:

$$\Theta = T \cdot \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_L}{c_p}}$$

An Profilen der potentiellen Temperatur kann die Schichtung der Atmosphäre gut erkannt werden.

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dz} > 0 &\rightarrow \text{stabile Schicht} \\ \frac{d\Theta}{dz} = 0 &\rightarrow \text{neutrale Schicht} \\ \frac{d\Theta}{dz} < 0 &\rightarrow \text{labile Schicht} \end{aligned}$$

6. Bisherige Annahme:

Besagtes Verhalten bei sogenannter Strahlungswetterlage \rightarrow wolkenlose oder nahezu wolkenlose Wetterlage, die sehr stark von Strahlungsprozessen geprägt ist.

Vorkommen: z.B. sommerliche Hochdrucklage.

7. Grenzschicht über Wasser:

- Grenzschichthöhe variiert sehr viel geringer im Tagesgang als über Land.
- Ursache: kleinere Temperatur-Amplitude der Wasseroberfläche
 $c_w = 4,18$
- Wasser kann „beliebig“ viel Energie in Form von latenter Energie abgeben.

8. Andere Wetterlagen:

Auch bei keinen Strahlungslagen tritt Grenzschicht auf. \Rightarrow In der Regel kompliziertere Strukturen. Unter Umständen keine oder nur geringe Änderung im Tag- / Nachtverlauf.

9. Räumlich variierende Grenzschicht:

- Vor allem bei Landnutzungsänderungen (Land / See-Übergang, Stadt / Land-Übergang).
- Änderung der Topographie, Übergang von Hochplateau zu tiefer liegenden bergigen Strukturen.

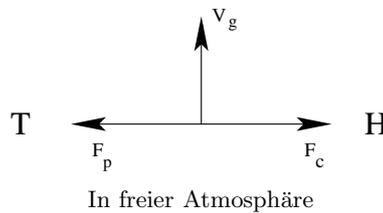
1.7 Prandtl-Schicht

- Stellt neben der laminaren Unterschicht die bodennächste Schicht der Grenzschicht dar.
- Umfasst ca. $\frac{1}{10}$ der Grenzschichtdicke.

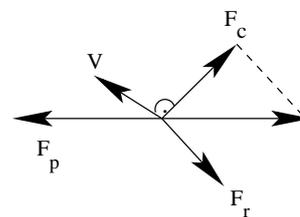
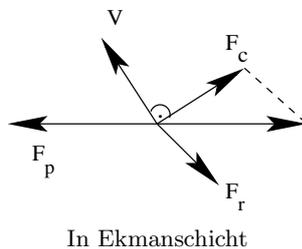
- Corioliskraft wird als vernachlässigbar angesehen, \Rightarrow keine Änderung der Windrichtung mit der Höhe.
- größte vertikale Änderungen sind hier zu finden (von physikalischen Größen (T,v,s)).
- Die turbulenten Wärmeflüsse werden als höhenkonstant angesehen, Abweichungen bis 10% erlaubt.
- $|v|$ erreicht an Obergrenze der Prandtl-Schicht ca 70-80% des Betrages des geostrophischen Windes.
- Obergrenze Prandtl-Schicht ist nicht immer exakt bestimmbar.

Am Oberrand der Grenzschicht

Geostrophische Bedingungen ($\vec{F}_p = \vec{F}_c$)



Grenzschicht (Ekman)



2.0 Energiebilanz einer Fläche

1. Energiebilanz: Energieerhaltungssatz auf eine Fläche angewendet
2. Fläche: 2-D, kein Volumen, keine Wärmekapazität ($C = m \cdot c = 0$), dichtelos, masselos. \Rightarrow kann keine Energie speichern, nur umsetzen.
3. Energiefluß: Energie die pro Zeiteinheit durch eine beliebige Fläche hindurchströmt. Einheit: $\frac{J}{s} = W$
4. Energieflußdichte: Energie die pro Zeiteinheit durch eine bestimmte Fläche hindurchströmt. Einheit: $\frac{J}{sm^2} = \frac{W}{m^2}$
5. Ideale Fläche:
 - glatt
 - homogen (keine räumlichen Unterschiede)

- horizontal (eben)
- unendlich ausgedehnt
- undurchsichtig (nur Absorption und Reflexion, keine Transmission)

⇒ keine horizontale Advektion (Homogenität)

⇒ nur vertikale Energieflüsse

Advektion:

Prozess des Transportes einer atmosphärischen Eigenschaft aufgrund von Massenbewegung der Atmosphäre infolge eines Geschwindigkeitsfeldes.

Man spricht von Advektion in Bezug auf die betrachtete Eigenschaft, wenn:

→ sich die herangeführte Luftmasse hinsichtlich dieser Eigenschaft von der am betrachteten Ort unterscheidet.

→ Gradient der Eigenschaft vorhanden.

$$\text{Advektion} = \vec{v} \cdot \nabla \cdot (\text{Eigenschaft}) = \underbrace{u \cdot \frac{\partial \dots}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \dots}{\partial y}}_{\text{horizontale Advektion}} + \underbrace{w \cdot \frac{\partial \dots}{\partial z}}_{\text{vertikale Konvektion}}$$

Auf idealen Flächen nur vertikaler Austausch, nur vertikale Energieflüsse von Interesse.

System idealer Fläche ist eine reine Modellvorstellung, Schwachstellen (z.B. Undurchsichtigkeit) demnach tragfähig.

2.1 Glieder der Energiebilanz

1. Strahlungsbilanz

Nettostrahlungsfluß, der sich aufgrund von Strahlungsprozessen an der betrachteten Fläche einstellt.

2. sensibler Wärmefluß / Fluß fühlbarer Wärme

Fluß, der sich aufgrund von Temperaturunterschieden von der Bodenoberfläche und der darüber liegenden Luft ergibt. Der Fluß ist so gerichtet, dass die Temperaturdifferenz (ΔT) abgebaut wird.

3. latenter Wärmefluß

Fluß latenter Energie, ΔT in Luft bei Phasenänderung des H_2O_{Dampf}

Ursachen: a) Evaporation

b) Evapotranspiration

c) Kondensation (zum Boden gerichteter Feuchtefluß)

4. Bodenwärmestrom

Wärmeaustausch des Bodens mit der Oberfläche aufgrund von Wärmeleitung.

2.2 Formen der Energiebilanzgleichung

1. Geiger (klassisch)

$$Q + B + L + V = 0$$

Alle Flüsse zur Oberfläche hin positiv

2. Oke

$$Q = B + L + V$$

Q ist positiv, nicht Strahlung zum Boden negativ

3. Arya (hier) wie Oke

$$\underbrace{R_H}_{\text{Strahlungsbilanz}} = \underbrace{H}_{\text{fühlbare Wärme}} + \underbrace{H_L}_{\text{latente Wärme}} + \underbrace{H_G}_{\text{Bodenwärmestrom}}$$

4. Garrat

$$R_n - R_G = H + H_L$$

5. Foken

$$-R_n = H + H_L + H_G$$

2.3 Fluß-Gradient-Gleichungen

Fluß / Flußdichte = Transporteigenschaft des Mediums in Bezug auf zu transportierende Größe * Gradient der relevanten Eigenschaft

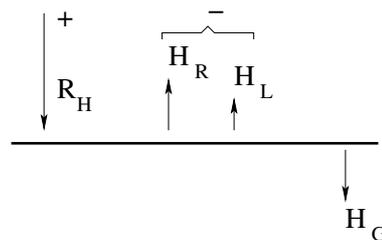
Bsp:

$$H = -k_h \rho c_p \frac{\partial T}{\partial z}$$

Fluß positiv, entgegen dem Gradienten → von Fläche weg.

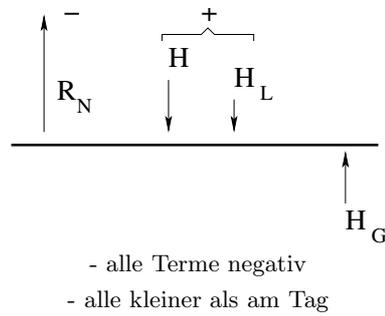
2.4 Typische Energiebilanz-Momentaufnahmen

1. Strahlungswetterlage, Tag, feuchte Oberfläche

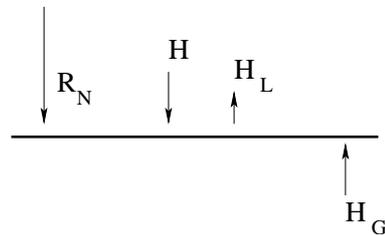


Grafiken nicht masstabstreu
(es soll gelten, R ist so lang wie die Summe des Restes)

2. Bei Nacht

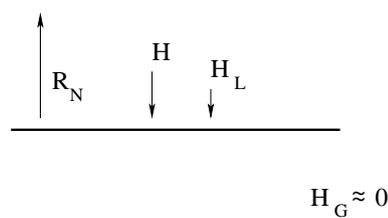


3. Ausgesuchte Flächen



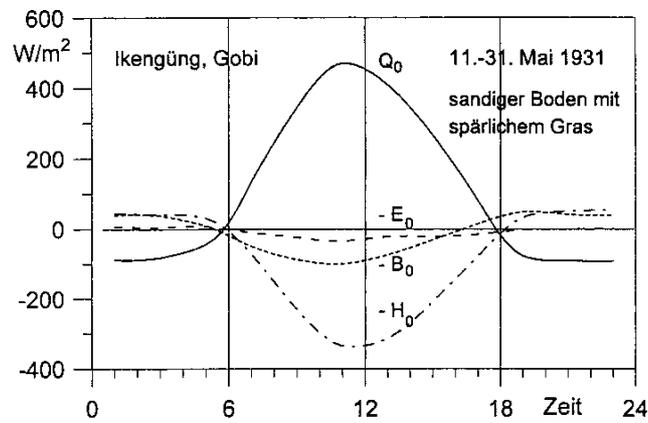
Oaseneffekt: Warme, trockene Luft strömt über eine sehr feuchte Oberfläche. Daraus resultiert ein großer Strom latenter Wärme H_L , weg von der Oberfläche (positiv). Die Oberfläche kühlt daher sehr stark ab, wodurch sich ein Strom fühlbarer Wärme hin zur Oberfläche ausbildet (negativ). Weiter stellt sich ein Bodenwärmefluß vom Boden zur Oberfläche hin ein (negativ).

Eine weiteres, unter Umständen eine gefährliche Situation beschreibendes Beispiel (Nacht-situation)

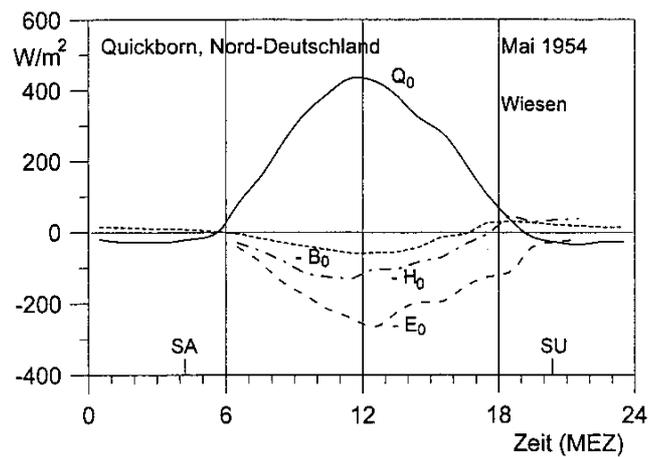


Energiebilanz einer Brücke mit ggf. Glatteisbildung

2.5 Energiebilanzterme im Tagesgang



Tagesgang der Komponenten der Energiebilanz.
Wüstenboden mit tagsüber sehr kleinem E_0 und großem H_0

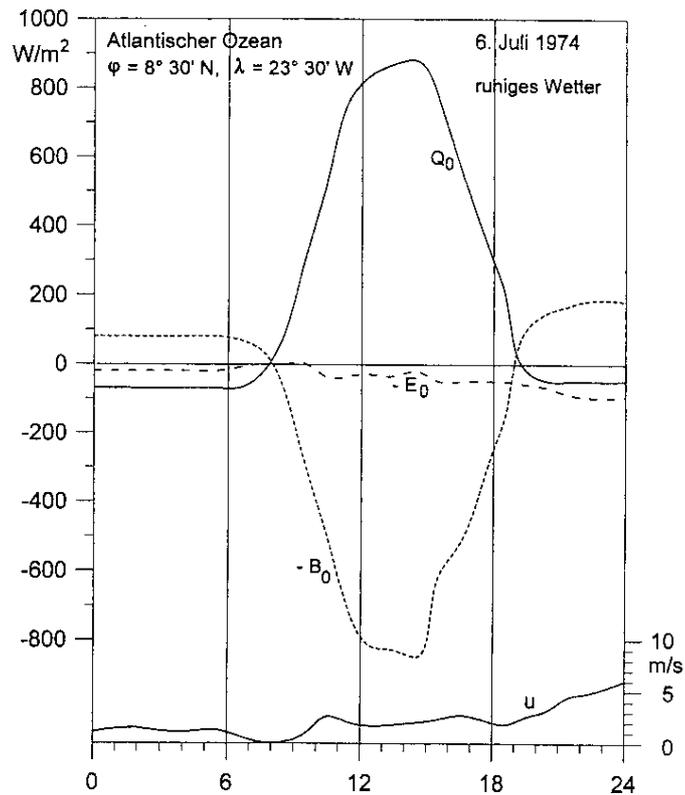


Feuchte Wiese mit $E_0 > H_0$ (am Tag)

Tagesgänge der Energiebilanzterme:

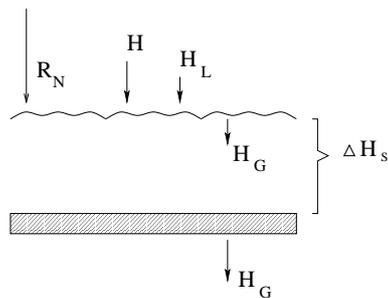
Größenordnungen:
(feuchte Wiese) $R_N \approx 500 \text{ W/m}^2$
 $H \approx 100 \text{ W/m}^2$
 $H_L \approx 350 \text{ W/m}^2$
 $H_G \approx 50 \text{ W/m}^2$

Größenordnungen:
(trockene Fläche) $R_N \approx 500 \text{ W/m}^2$
 $H \approx 400 \text{ W/m}^2$
 $H_G \approx 100 \text{ W/m}^2$
 $H_L \approx \text{sehr klein } \text{W/m}^2$



Energiebilanz für den tropischen Atlantik bei ruhigem Strahlungswetter und die Windgeschwindigkeit u .
 H_0 ist bei etwa $10 W/m^2$. Die meiste Energie wird zu Erwärmung des Wassers benötigt.

Hier wird fast die gesamte Einstrahlung für die Erwärmung des Wassers verwendet. Um diese Situation zu beschreiben gibt es zwei Möglichkeiten.

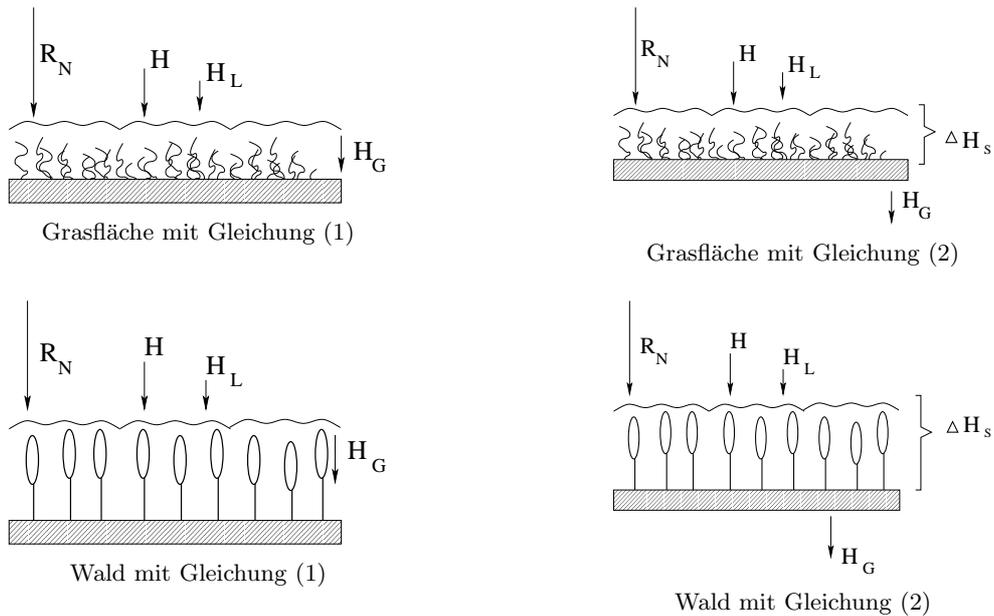


$$R_N = H + H_L + H_G \quad (1)$$

$$R_N = H + H_L + H_G + \Delta H_s \quad (2)$$

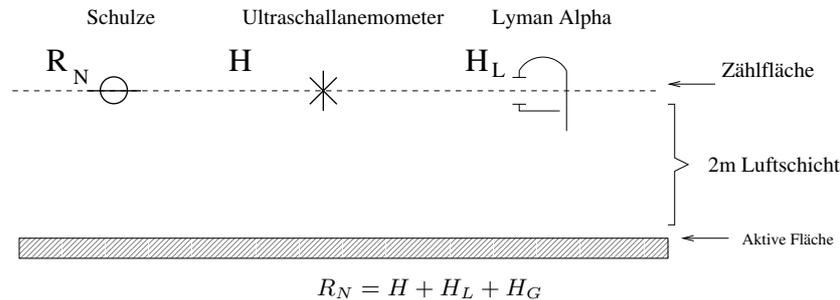
Wobei $R_N = K \downarrow + L \downarrow - K \uparrow - L \uparrow$

Gleichung (1) wird immer auf eine Fläche bezogen und Gleichung (2) immer auf ein Volumen.
 Beispiele:



Def.: Aktive Fläche: Die Fläche, in / auf der der größte Teil der Energieumsetzungen stattfindet.

Def.: Zählfläche: Die Fläche, in der die Terme der Bilanzgleichung gemessen werden.



Luftschicht ($\approx 2m$) ohne Einfluß (Annahme!).

Auf besagte Art Energiebilanz der BodenOberfläche messbar (Annahme!).

Problem: Wenn Luftschicht stört (z.B. Bodennebel).

$$\underbrace{\frac{dT}{dt}}_{\text{individuelle Änderung}} = \frac{\partial T}{\partial t} + v \nabla T = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{lokale Änderung}} + \underbrace{v_h \nabla_h T}_{\text{Advektion}} + \underbrace{w \frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{Konvektion}}$$

2.10 Eulersche Zerlegung

Unterschied zwischen Feld und Luftteilchen:

1. Feld: Räumliche Verteilung einer Größe Ψ (Skalar, Vektor) in der Atmosphäre.

$\Psi = \Psi(x,y,z)$ stationäres Feld / $\Psi = \Psi(x,y,z,t)$ zeitlich variabel.

2. Luftteilchen / Luftpaket:

- Luftvolumen genügend groß, so daß ihm bestimmte Eigenschaften zugeordnet werden können (z.B. Temperatur, Feuchte, ...).
- Die Identifikation / Identifizierung eines Teilchens ist sehr schwierig, deshalb werden atmosphärische Eigenschaften vornehmlich als Feldgrößen dargestellt.

Problem: Gleichungen, die physikalische Prozesse beschreiben, beziehen sich auf Teilchen. Gemessen werden aber in der Regel Feldgrößen. \Rightarrow Zusammenhang zwischen Feld und Teilchen muss bekannt sein.

Gegeben: $\Psi = \Psi_{(x,y,z,t)}$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

Die partiellen Ableitungen beziehen sich auf das Feld, die individuellen auf das Potential.

$$\underbrace{\frac{d\Psi}{dt}}_{\text{individuelle \u00c4nderung}} = \underbrace{\frac{\partial\Psi}{\partial t}}_{\text{lokale \u00c4nderung}} + \underbrace{u \frac{\partial\Psi}{\partial x} + v \frac{\partial\Psi}{\partial y}}_{\text{Advektion}} + \underbrace{w \frac{\partial\Psi}{\partial z}}_{\text{Konvektion}}$$

z.B. $\Psi = T$

station\u00e4res Feld $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\frac{dT}{dt} = \vec{v} \nabla T$$

oder die individuelle \u00c4nderung = 0 (konservative Gr\u00f6\u00dfe), z.B. $\frac{dT}{dt} = 0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v \nabla T$$

Die lokale zeitliche \u00c4nderung wird durch die Advektion des T - Feldes hervorgerufen.

2.11 Energiebilanz und Advektion

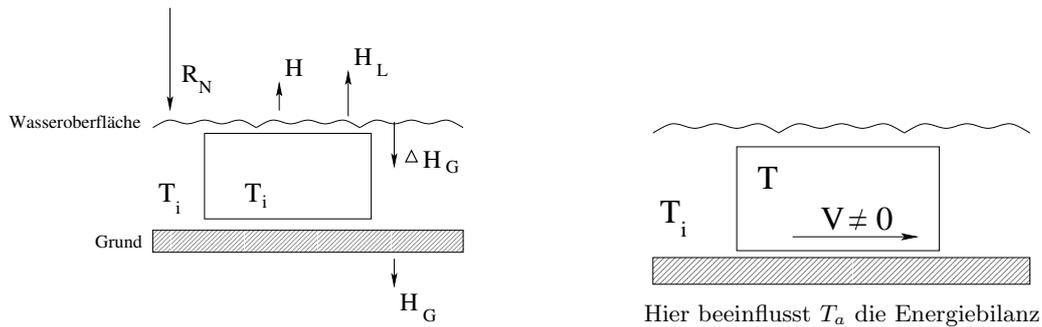
(1) $R_N = H + H_L + H_G$

Gleichung enth\u00e4lt keinen Advektionsterm. Der Austausch zwischen Fl\u00e4che und Atmosph\u00e4re geschieht nur und ausschlie\u00dflich \u00fcber vertikale Fl\u00fcsse.

(2) $R_N = H + H_L + H_G + \Delta H_s$

ΔH_s ist ein Speicherterm $\equiv V_s$, wobei V_s sei ein Volumen, das von advehiertes Masse durchstr\u00f6mt wird.

In diesem Fall muss die Advektion ber\u00fccksichtigt werden.



2.12 Energiebilanz in der Praxis

- Üblicherweise wird Gleichung (1) verwendet.
- Interessierende Energieumsatzfläche: Bodenoberfläche
- Messung von R_N , H , H_L im Niveau einer Zählfläche
- Annahme hierbei:
Flußdichten im Zählflächenniveau seien identisch den Flußdichten von der Bodenoberfläche.

⇒ Dadurch, daß Zählfläche und Energieumsatzfläche nicht identisch sind, ergibt sich unter Umständen das Problem der internen Grenzschicht.

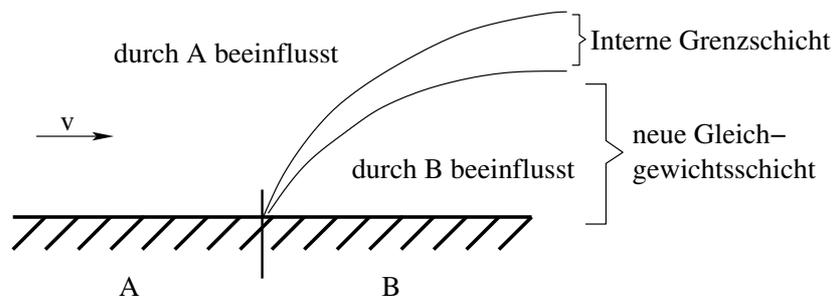
2.13 Interne Grenzschicht

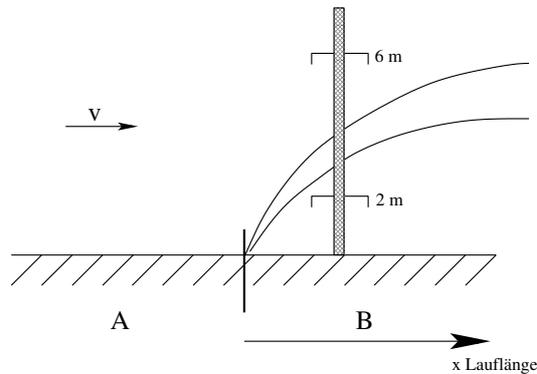
Def.: Störungsschicht in der bodennahen Luftschicht, die sich bei vorhandenem Wind und inhomogenen Oberflächenbedingungen ergibt.

Ursache: Inhomogene Oberflächeneigenschaften

- Änderung der Bodenrauigkeit (z.B. Wiese ↔ Maisfeld)
- Änderung der Temperatur
- Änderung der Feuchte

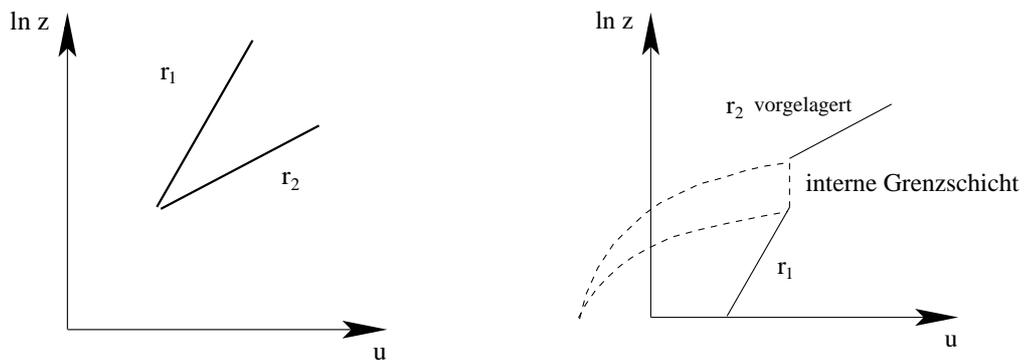
⇒ Interne Grenzschichten treten dann auf, wenn Flächen unterschiedlicher Eigenschaften aneinander stoßen.





Fehlerbehaftete Messanordnung

Bei diesem Beispiel werden über Fläche B in 6m Höhe die Auswirkungen von Fläche A gemessen → Daten unbrauchbar!



Höhe der internen Grenzschicht:

$$\delta = a \cdot x^b$$

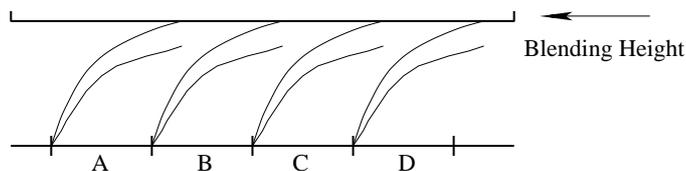
x = Lauflänge

a, b = empirische Parameter mit $0,04 \leq a \leq 0,3$ und $0,43 \leq b \leq 1,4$

2.14 Blending height - Konzept

Annahmen zu interner Grenzschicht:

- Interne Grenzschicht entwickelt sich nur bis zu einer bestimmten Höhe
- Höhe wird in bestimmter Entfernung x erreicht
- Ab jenem Punkt x bilden alle luvseitig initiierten Grenzschichten eine Schicht



Annahme in Bezug auf Fläche:

- Oberhalb der blending height nur ein einheitlicher Fluß feststellbar \leftrightarrow unmittelbare Bodenoberflächeneigenschaft nicht mehr erkennbar. Die bodennahen Prozesse sind oberhalb der blending height ausgeblendet \rightarrow blending height - Konzept.
- Höhe der blending height etwa 30 - 100m
- Bedeutung des Konzeptes: Wichtig bei numerischen Modellen
- Kritisch: Anwendung bei Konvektion umstritten

Beispiel für Energiebilanzanwendung

Abschätzung für Verdunstung von Wasseroberflächen.

Gesucht: Evaporation in mm/d, wobei d = 1 Tag

Gegeben:

- $R_N \approx 400W/m^2$
- Wärmefluß in Tiefen größer 50m vernachlässigbar. (D = 50)
- Erwärmungsrate der 50m dicken Schicht sei 0,05K/d
- Das Bowen - Verhältnis B_o sei $B_o = 0,1$, wobei $B_o = \frac{H}{H_L}$

Ausgangsgleichung ist Gleichung (1)

$$\begin{aligned}
 R_N &= H + H_L + H_G \\
 H_G &= \rho c \int_0^D \frac{\partial T}{\partial t} dz \\
 &= \underbrace{\rho}_{\text{Dichte } H_2O} \cdot \underbrace{c}_{\text{spezifische Wärme}} \cdot \underbrace{D}_{50m \text{ Dicke}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)}_{\substack{\text{Mittel über den Tag} \\ 0,05K/d}}
 \end{aligned}$$

$$\rho = 1000kg/m^3$$

$$c = 4,18kJ/kg \cdot K$$

$$H_G = 1000kg/m^3 \cdot 4,18kJ/kg \cdot K \cdot 50m \cdot \frac{0,05K}{86400s} = 121J/sm^2 = 121W/m^2$$

$$B_o = 0,1 = \frac{H}{H_L} \leftrightarrow H = 0,1H_L$$

$$R_N - H_G = H + H_L = 0,1H_L + H_L = 1,1H_L$$

$$R_N - H_G = 1,1H_L$$

$$\Rightarrow 400W/m^2 - 121W/m^2 = 1,1H_L \leftrightarrow H_L = 253,6W/m^2$$

$$\Rightarrow H = 25,4W/m^2$$

$$H_L = \underbrace{E}_{\text{Massenflußdichte } [kg/m^2 \cdot s]} \cdot \underbrace{L_V}_{\text{Verdampfungswärme}}$$

Man beachte, dass der Beitrag der Verdampfungswärme temperaturabhängig ist.

$$\text{Hier: } L_V = 2,45 \cdot 10^6 \frac{J}{kg} \cdot \Rightarrow E = \frac{H_L}{L_V} = 1,03 \cdot 10^{-4} \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

Abnahme der Wasserhöhe in mm/d durch Verdunsten ?

$$E = \varrho \cdot \dot{h} = \varrho \cdot \frac{dh}{dt}$$

Dimensionsbetrachtung:

$$E = \left[\frac{kg}{m^2 s} \right] = \frac{M}{L^2 \cdot T}$$

$$\frac{M}{L^2 \cdot T} \cdot \frac{L}{L} = \underbrace{\frac{M}{L^3}}_e \cdot \underbrace{\frac{L}{T}}_{\dot{h}}$$

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \frac{E}{\varrho} = \frac{1,03 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}}{10^3} = 1,03 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s} \\ &= 1,03 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s} \cdot 86400 \frac{s}{d} = 0,089 \frac{m}{d} \\ &= 8,9 \frac{mm}{d} \end{aligned}$$

3.0 Strahlungsbilanz

Die Strahlungsbilanz R_N ist ein Bestandteil der Energiebilanzgleichung.

3.1 Strahlung, Wellenlängenbereiche

Def.: Strahlung: hier elektromagnetische Strahlung, meteorologisch relevante Strahlung (bodennah, Grund der Atmosphäre)

- kurzwellige Strahlung/Sonnenstrahlung
Intervall: $0,29\mu m \leq \lambda \leq 4\mu m$
Maximum bei $0,5\mu m$
- langwellige Strahlung/terrestrische Strahlung
Intervall: $4\mu m \leq \lambda \leq 100\mu m$
Maximum bei $10\mu m$

3.2 Strahlungsarten

- Direkte Sonnenstrahlung:
Kurzwellige Strahlung aus dem Raumwinkel der Sonne. Unterscheidung zwischen direkter Sonnenstrahlung auf eine horizontale Fläche oder direkte Sonnenstrahlung auf eine Fläche senkrecht zur Strahlrichtung.

- Diffuse Himmelsstrahlung:
Kurzwellige Strahlung aus dem Himmelshalbraum (oberer Halbraum) kommend, auf eine horizontale Fläche, wobei der Raumwinkel der Sonne abgedeckt/ausgeblendet wird.
- Globalstrahlung:
Summe von direkter Sonnenstrahlung (auf horizontale Fläche) und diffuser Himmelsstrahlung.
- kurzwellige Reflexstrahlung:
von Bodenoberfläche reflektierte Globalstrahlung
- langwellige atmosphärische Gegenstrahlung:
Langwellige Strahlung aus dem oberen Halbraum, d.h. aus der Atmosphäre kommend
- langwellige Ausstrahlung:
Langwellige Strahlung vom unteren Halbraum kommend, d.h. vom sichtbaren Boden ausgehend.

Viele Messgeräte empfangen Strahlung aus dem Raumwinkel $2\pi sr \hat{=}$ Halbraum.

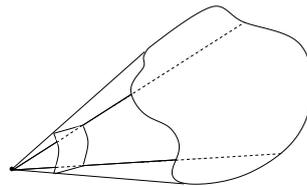
Nach oben ausgerichtet: Strahlung von der gesamten Himmelshalbkugel \rightarrow oberer Halbraum

Nach unten ausgerichtet: Strahlung vom Boden \rightarrow unterer Halbraum

Def.: Raumwinkel (Bronstein)

Als der Teil des Raumes, den von einem Punkt P aus nach allen Punkten einer geschlossenen Kurve ausgehenden Strahlen begrenzt wird. Er stellt den Sehwinkel dar, unter dem die gegebene Kurve von dem genannten Punkt aus gesehen wird. Als Maß für den Raumwinkeldient die Fläche, die von diesem Raumwinkel auf der Einheitskugel (Radius $r = 1$ mit Mittelpunkt P) ausgeschnitten würde. Die zugehörige Einheit ist Steradian [sr].

Der Raumwinkel einer Kugel ist demnach $4\pi sr$ (Kugeloberfläche $O = 4\pi r^2, r = 1$), der einer Halbkugel somit $2\pi sr$.



Skizze zum Raumwinkel

3.3 Strahlungsbilanz R_N

$$R_N = K' + L'$$

$$K' = K \downarrow - K \uparrow$$

$$L' = L \downarrow - L \uparrow$$

$$K \downarrow = I_h + H \equiv G$$

$$K \uparrow = a \cdot G = a \cdot (I_h + H)$$

$$L \downarrow$$

$$L \uparrow = (1 - \epsilon)L \downarrow + \epsilon\sigma T_B^4$$

Strahlungsbilanz

Kurzwellige Bilanz

Langwellige Bilanz

einfallende kurzwellige Strahlung

reflektierte kurzwellige Strahlung

langwellige atmosphärische Gegenstrahlung

reflektierte atmosphärische Gegenstrahlung und eigenständig emittierte langwellige Strahlung (Stefan-Boltzmann-Gesetz)

Terme eingesetzt:

$$R_N = G - aG + L \downarrow - (1 - \epsilon)L \downarrow - \epsilon\sigma T_B^4 = (1 - a)(I_h + H) + \epsilon(L \downarrow - \sigma T_B^4)$$

mit $I_h = I_s \cdot \cos(z)$ (Lambertsches Kosinusetz, siehe unten) und T_B der Temperatur der Bodenoberfläche erhält man Q in der Form:

$$R_N = (1 - a)(I_s \cos(z) + H) + \epsilon(L \downarrow - \sigma T_B^4)$$

Bedeutung und Definition der verwendeten Terme:

- R_N = Strahlungsbilanz einer Fläche
Energieflußdichte, die aufgrund der Gesamtstrahlung (kurz- und langwellig) netto der Fläche zugute kommt oder netto von ihr abgegeben wird.
- K' = Kurzwellige Bilanz einer Fläche
Energieflußdichte, die netto aufgrund kurzwelliger Strahlung (0,3 bis ca. 4 μm) der Fläche zugute kommt oder von ihr abgegeben wird.
- L' = Langwellige Bilanz einer Fläche
Energieflußdichte, die netto aufgrund langwelliger Strahlung (ab ca. 4 bis 100 μm) einer Fläche zugute kommt oder netto von ihr abgegeben wird.
- $K \downarrow \equiv G$ = Globalstrahlung
Kurzwellige Strahlung, die auf eine horizontale Fläche aus dem oberen Halbraum auftrifft.
- $K \uparrow$ = kurzwellige Reflexstrahlung
ausgehend vom unteren Halbraum
- a = Albedo
Verhältnis von $K \uparrow / K \downarrow$, d.h. von reflektierter kurzwelliger Strahlung zu kurzwelliger Einstrahlung, wobei die kurzwellige Einstrahlung $K \downarrow$ identisch der Globalstrahlung G ist ($K \downarrow \equiv G$)
- I_h = direkte Sonnenstrahlung (aus dem Raumwinkel der Sonne) auf eine horizontale Fläche
- I_s = direkte Sonnenstrahlung (aus dem Raumwinkel der Sonne) auf eine Fläche senkrecht zur Strahlrichtung. Wenn von direkter Sonnenstrahlung ohne nähere Erläuterung gesprochen wird, so ist auf die getroffene Unterscheidung zu achten!
- H = Himmelsstrahlung
kurzwellige Strahlung auf horizontale Fläche aus oberem Halbraum unter Ausschluß der Strahlung aus dem Raumwinkel der Sonne (Globalstrahlung minus direkte Sonnenstrahlung (auf horizontale Fläche)).
- $L \downarrow$ = Langwellige atmosphärische Gegenstrahlung
Strahlung auf horizontale Fläche aus dem oberen Halbraum aufgrund der thermischen

Strahlung der Wolken, Aerosole und atmosphärischen Gase (insbesondere der Treibhausgase). Hierbei handelt es sich um eine eigenständige Strahlung, nur ganz geringe Anteile stellen Reflektionen der langwelligen Ausstrahlung des Bodens dar.

- $(1 - \epsilon)L \downarrow$ = am Boden reflektierter Anteil der langwelligen atmosphärischen Gegenstrahlung
- $\epsilon\sigma T_B^4$ = Stefan-Boltzmann-Gesetz (Integral von Planck über alle Wellenlängen) = langwellige Ausstrahlung aus unterem Halbraum
(ϵ = Emissionskoeffizient, σ = Stefan-Boltzmann-Konstante, T_B = Strahlungstemperatur der betrachteten Oberfläche in Kelvin)
- ϵ = Emissions-/Absorptionskoeffizient im langwelligen Bereich (gemäß Kirchhoff) , $\epsilon = 1$ gilt für einen schwarzen Körper
- σ = Stefan-Boltzmann-Konstante = $5,67051 \cdot 10^{-8} W/(m^2 K^4)$

Die verschiedenen Größen im Tagesgang:

STRAHLUNGSEIGENSCHAFTEN

Oberfläche		Albedo	Emissivität
Wasser	kl. Zenitwinkel (hoher Sonnenstand)	0,03 - 0,10	0,92 - 0,97
	gr. Zenitwinkel	0,10 - 0,50	0,92 - 0,97
Schnee	alt	0,40 - 0,70	0,82 - 0,89
	neu	0,45 - 0,90	0,90 - 0,99
Eis	Seeis	0,30 - 0,40	0,92 - 0,97
	Gletscher	0,20 - 0,40	
Reiner Sand	trocken	0,35 - 0,45	0,84 - 0,90
	naß	0,20 - 0,30	0,91 - 0,95
Blanker Boden	trocken	0,20 - 0,35	0,95
	feucht	0,10 - 0,20	0,97
	wet fallow field	0,10 - 0,20	
Gras	lang (1m)	0,10 - 0,20	0,90 - 0,95
	kurz (0,02m)	0,10 - 0,20	0,90 - 0,95
Agrikultur	Weizen, Reis, ect.	0,10 - 0,25	0,90 - 0,99
Wälder		0,10 - 0,20	0,97 - 0,98
		0,05 - 0,15	0,97 - 0,99

Merke:

- Albedo a:
Alle natürlichen Oberflächen bis auf Schnee haben eine Albedo kleiner 0,5 (im Kurzwelligen).
- Emissivität ϵ :
Die Emissivität von natürlichen Oberflächen liegt mit Ausnahme von Beton für alle Flächen deutlich über 0,8.

Spruch: (aus Geiger) Neuschnee kann man im Langwelligen durch Aufbringen von Ruß nur heller machen.

$$L \uparrow = \epsilon \sigma T^4$$

$$\epsilon_{Schnee} \approx 0,99 \Rightarrow L \uparrow_{Schnee} \approx \sigma T^4$$

$$\epsilon_{Ru\beta} \approx 0,8$$

$$\Rightarrow \epsilon_{Ru\beta} < \epsilon_{Schnee} \implies L \uparrow_{Ru\beta} < L \uparrow_{Schnee}$$

4.0 Bodentemperaturen und Bodenwärmestrom

1. Unterscheidung zwischen:

- Bodentemperatur \rightarrow Temperatur des Bodens
- Oberflächentemperatur \rightarrow Temperatur der betrachteten Bodenoberfläche
- bodennahe Temperatur \rightarrow Lufttemperatur ca. 1-2m über dem Boden

2. Bestimmung der Temperatur

- Bodentemperatur: zB. mit Pt-100
- Lufttemperatur: ebenfalls Thermometer
- Oberflächentemperatur: Strahlungsthermometer
(berührungslose Messung \rightarrow Oberflächeneigenschaft nicht verändern)

3. Temperaturamplituden

Größen:

- Oberflächentemperatur hat die größte Amplitude ($10^\circ C < T_B < 55^\circ C$)
- Lufttemperatur hat eine geringere Amplitude
- Bodentemperatur hat eine noch geringere Amplitude

4.3 Phänomene

1. Oberflächentemperatur

- Bodenoberflächentemperatur hat größte Amplitude von den besagten Temperaturen.
- Bei Anwesenheit von Feuchtigkeit ist die Amplitude reduziert. (größere Evaporation)
- Die von Pflanzen gebildete Oberfläche kann ähnliche Temperaturamplituden aufweisen wie trockener Boden.
- Vegetation (grüne Pflanzen) verändert Oberflächentemperatur.
- Vegetation (grün, trocken) verändert Oberflächentemperatur des Bodens.

2. Bodentemperatur

- Tägliche Temperaturänderung bis in Tiefen von ca 1m feststellbar.
- Jährliche Temperaturwelle ist feststellbar bis ca. 10m Tiefe.
- Die Temperaturamplitude nimmt näherungsweise exponentiell mit der Tiefe ab.
- Die Temperaturwelle zeigt mit zunehmender Tiefe eine größer werdende Phasenverschiebung.

4.4 Thermische Bodeneigenschaften

Folgende Größen sind notwendig:

- ρ (Massendichte kg/m^3)
- $C = mc$ (Wärmekapazität J/K) oder
- $C' = \rho c$ (Wärmekapazität J/m^3)
- c (spezifische Wärme $\text{J}/(\text{kg K})$)
- k (Wärmeleitfähigkeit $\text{W}/(\text{m K}) = \text{J}/(\text{s m K})$)
- α (Temperaturleitfähigkeit m^2/s)

c = spezifische Wärme:

Energie, die einer Masseneinheit des betrachteten Stoffes zugeführt werden muss, um die Temperatur um 1K zu erhöhen.

C = Wärmekapazität:

Energie, die man einem Körper der Masse m zuführen muss, um dessen Temperatur um 1K zu erhöhen.

Bei der auf das Volumen bezogenen Kapazität gilt die Aussage pro Volumeneinheit.

k = Wärmeleitfähigkeit:

Maß für die Fähigkeit eines Stoffes, die Wärme zu leiten. Ein Stoff hat die Leitfähigkeit $1 \frac{\text{W}}{\text{mK}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{smK}}$, wenn die Wärmemenge 1J bei einer Temperaturdifferenz von 1K über eine Entfernung von 1m innerhalb von 1s fließt.

α = Temperaturleitfähigkeit:

Maß für die Fähigkeit eines Stoffes Temperaturunterschiede durch Leitung auszugleichen.

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

Die thermische Relaxationszeit τ' ist ein Maß für die benötigte Zeit, um eine gegebene Temperaturdifferenz auszugleichen.

$$\tau' = \frac{d^2}{\alpha} = d^2 \frac{\rho c}{k}$$

d = Entfernung, über die die betrachtete Temperaturdifferenz besteht.

Molecular thermal properties of natural materials

Material	Condition	Mass density ρ ($\frac{kg}{m^3} \cdot 10^3$)	Specific heat c ($\frac{J}{kgK} \cdot 10^3$)	Heat capacity C ($\frac{J}{m^3K} \cdot 10^6$)	Thermal conductivity k ($\frac{W}{mK}$)	Thermal diffusivity x_h ($\frac{m^2}{s} \cdot 10^{-6}$)
Air	20°C, Still	0,0012	1,01	0,0012	0,025	20,5
Water	20°C, Still	1,00	4,18	4,18	0,57	0,14
Ice	0°C, Still	0,92	2,10	1,93	2,24	1,16
Snow	Fresh	0,10	2,09	0,21	0,08	0,38
Snow	Old	0,48	2,09	0,84	0,42	0,05
Sandy soil	Fresh	1,60	0,80	1,28	0,30	0,24
(40% pore space)	Staturated	2,00	1,48	2,96	2,20	0,74
Caly soil	Dry	1,60	0,89	1,42	0,25	0,18
(40% pore space)	Staturated	2,00	1,55	3,10	1,58	0,51
Peat soil	Dry	0,30	1,92	0,58	0,06	0,10
(80% pore space)	Staturated	1,10	3,65	4,02	0,50	0,12
Rock	Solid	2,70	0,75	2,02	2,90	1,43

4.5 Bodenwärmestrom

Def.: Term der Energiebilanz der Bodenoberfläche, der die vom Boden aufgenommene oder abgegebene Energieflußdichte beschreibt.

Diskussion:

- Meinung, daß der Bodenwärmestrom in Energiebilanzgleichung von untergeordneter Bedeutung sei, weil:
 - Term im Tagesgang nahezu oder tatsächlich ausgeglichen ist.
 - Term leicht als Restglied der bekannten anderen Terme bestimmbar. ($H_G = R_N - H - H_L$)
- Allerdings:
 - Wenn H_G als Restglied bestimmt wird, dann alle Fehler der übrigen Glieder in H_G .
 - Bei Sverdrupmethode oder auch Bouven - Verhältnis genannt, muss H_G explizit bekannt sein.

5.0 Möglichkeiten der Bestimmung des Bodenwärmestroms

1. Mittels Wärmeleitungsgleichung (Newtonsche Wärmeleitungsgleichung)
2. Tautochronenmethode
3. Wärmeleitungsplatten
 - unkalibrierte Platten
 - im Labor kalibrierte Platten
 - selbstkalibrierende Platten

5.1 Wärmeleitungsgleichung

Für $T = T(t, z)$

$$H_G = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$
$$\rightarrow H_G \approx -k \frac{\Delta T}{\Delta z} = -k \frac{T_1 - T_2}{Z_1 - Z_2}$$

H_G : Bodenwärmestromdichte

k : Wärmeleitfähigkeit

T_1 : Oberflächen nahe Temperatur

T_2 : Oberflächen ferne Temperatur

z_1 : Oberflächen nahe Tiefe

z_2 : Oberflächen ferne Tiefe

$\rightarrow H_G > 0$ für $T_1 > T_2$

Was muss bekannt sein:

- ΔT (Temperaturdifferenz)

- Δz (Höhendifferenz)

- k (Wärmeleitfähigkeit)

Bestimmung der notwendigen Größen:

Für Bodenwärmestrom an Oberfläche gilt z_1 auf Bodenniveau messen.

- unbewachsener Boden: T_0 mittels Strahlungsthermometer
- bewachsener Boden: T_0 bestimmen mittels Extrapolation des Bodentemperaturprofils. Die Temperatur ist unmittelbar unter Pflanzen (im Boden) zu bestimmen
- Bestimmung von Δz durch Längenmessung
- Wärmeleitfähigkeit k
 - k muss über Δz konstant sein
 - k variiert sehr stark mit der Bodenfeuchte. Bodenfeuchte = $f(t)$ (Abtrocknen der bodenoberflächennahen Schicht, bei Taufall anfeuchten, bei Regen massive Änderung von k)

\rightarrow Das k sich unter Umständen sehr stark im Tagesverlauf ändert.

\rightarrow Man müsste k in sofern kontinuierlich bestimmen.

\rightarrow Wärmeleitungsgleichung nur unter sehr idealen Bedingungen anwendbar.

\rightarrow Verfahren in Meteorologie kaum angewendet.

5.2 Tautochronenmethode

Def.: Tautochrone: (griechisch) zur gleichen Zeit.

Tautochronen: Kurvenschar der Bodentemperaturprofile.

Beispiel: Bodentemperaturprofil

- Leipzig
- komplizierter Tagesgang
- 10 Bodentiefen
- Extreme: 5 Uhr und 15 Uhr Tautochrone

Fouriersche Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho \cdot c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

mit ρ = Bodendichte, c = spezifische Wärme, k = Wärmeleitfähigkeit, α = Temperatur-Leitfähigkeit.

Herleitung der Fourier-Wärmeleitungsgleichung (Fourier-WLG):

generelle Form:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

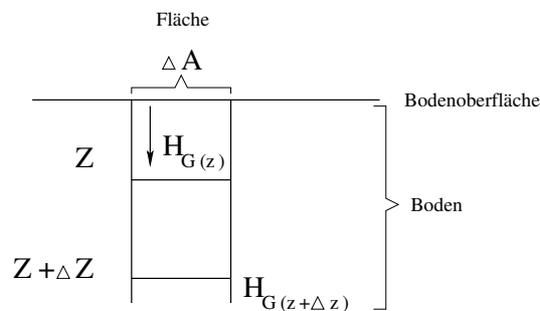
Fourier-WLG regelt gesamten räumliches und zeitliches Verhalten einer Temperatur-Verteilung / -Feldes, d.h. die Wärmeleitungsverhältnisse an den Systemgrenzen (Randbedingungen) gegeben sind.

Eindimensionale Form:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Die zeitliche Änderung der Temperatur T an einem Ort ist gleich der 2. Ableitung von T nach z multipliziert mit der Temperaturleitfähigkeit α .

Herleiten der eindimensionalen Form:



Bodenskizze mit 2 Niveaus für den Wärmefluß

Wärmefluß im Niveau z : $H_G \cdot \Delta A$

Wärmefluß im Niveau $z + \Delta z$: $\left(H_G + \frac{\partial H_G}{\partial z} \cdot \Delta z \right) \cdot \Delta A$

Energieänderungen in betrachteter Schicht aufgrund von Flußdivergenzen.

$$\Delta (m \cdot c \cdot T) = \text{Energieänderung}$$

$$\text{Energieänderung pro Zeit} = \frac{\Delta(m \cdot c \cdot T)}{\Delta t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (m \cdot c \cdot T) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\Delta A \cdot \Delta z}_{\Delta V} \cdot \rho \cdot c \cdot T \right)$$

$$\begin{aligned}
&= H_G \cdot \Delta A - \left(H_G + \frac{\partial H_G}{\partial z} \cdot \Delta z \right) \cdot \Delta A \\
&= \underbrace{H_G \cdot \Delta A - H_G \cdot \Delta A}_{=0} - \frac{\partial H_G}{\partial z} \cdot \Delta z \cdot \Delta A
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varrho \cdot c \cdot T}{\partial t} = - \frac{\partial H_G}{\partial z}$$

mit $\varrho \neq \text{fct}(t)$ und $H_G = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial z}$

$$\Rightarrow \varrho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = +k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\varrho \cdot c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

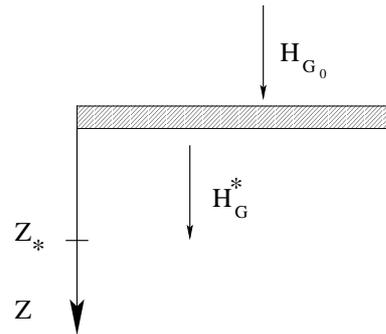
$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Tautochronenmethode:

Wir gehen aus von der Fourier-WLG in der Form, in der der Bodenwärmestrom noch explizit enthalten ist.

$$\frac{\partial H_G}{\partial z} = -\varrho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
\int_{H_{G^*}}^{H_{G0}} dH_G &= \int_{z^*}^0 -\varrho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dz \\
\int_{H_{G^*}}^{H_{G0}} dH_G &= \int_0^{z^*} \varrho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dz \\
H_{G0} - H_{G^*} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{z^*} (\varrho \cdot c \cdot T) dz \\
&\approx \frac{\Delta}{\Delta t} \int_0^{z^*} (\varrho \cdot c \cdot T) dz
\end{aligned}$$



$$H_{G0} - H_{G^*} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_0^{z^*} \varrho \cdot c \cdot T(t_2, z) dz - \int_0^{z^*} \varrho \cdot c \cdot T(t_1, z) dz \right\}$$

H_{G0} ist hier die gesuchte Größe.

2 Möglichkeiten z^* zu wählen:

a) z^* so, dass $H_G(z^*) = H_{G^*} = 0$, also so tief im Boden, bis der Bodenwärmestrom $H_{G^*} = 0$ ist.

b) z^* so, dass $H_G(z^*) = H_{G^*} \neq 0$

Fall a: $H_{G^*} = 0$ und $H_{G^*} = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z^*}$

$$H_{G0} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_0^{z^*} \varrho \cdot c \cdot T(t_2, z) dz - \int_0^{z^*} \varrho \cdot c \cdot T(t_1, z) dz \right\}$$

Die Terme $T(t_i, z)$ unter den Integralen stellen die Tautochronen zu den Zeiten t_i dar.

\Rightarrow Die Differenz der Integrale, normiert mit der Zeitspanne $\Delta t = t_2 - t_1$ ist gleich der netto in die Schicht geflossene bzw. von der Schicht abgegebenen Bodenwärmeflußdichte. Man erhält $\varrho = \varrho(t, z)$ und $c = c(t, z)$ aus Bodenproben. Bei Änderungen der Bodeneigenschaften, z.B.

durch Regen, müssen die Bodenproben wiederholt werden.

Fall b: $H_{G^*} \neq 0$

wie Fall a, zusätzlich muss im Niveau z^* die Wärmeleitfähigkeit $k = \alpha \rho c$ bekannt sein. k kann über die Temperaturleitfähigkeit bestimmt werden. Es gilt:

$$\alpha = \frac{\omega}{2} \left(\frac{z_{i+1} - z_i}{\ln \frac{\Delta T_{i,ext}}{\Delta T_{i+1,ext}}} \right)^2$$

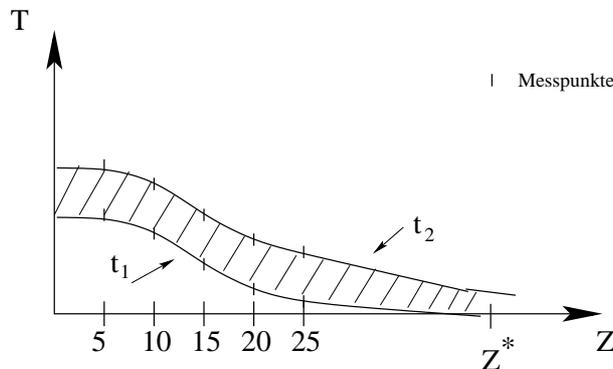
mit $\omega = \frac{1}{86400s}$ der Kreisfrequenz und z_{i+1}, z_i als Tiefen.

$$H_{G0} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_0^{z^*} \rho \cdot c \cdot T(t_2, z) dz - \int_0^{z^*} \rho \cdot c \cdot T(t_1, z) dz + H_{G^*} \right\}$$

$H_{G^*} \neq 0$ bedeutet für z^* , dass z^* so gewählt wird, dass $T(t, z^*)$ noch eine Tagesschwankung aufweist, wobei gleichzeitig gilt:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z^*}}_{H_{G^* \neq 0}} \neq 0$$

mit $H_{G^*} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z^*} \rightarrow H_{G^*} \approx -k \left(\frac{\Delta T}{\Delta z} \right)_{z^*}$, das in die obige Gleichung für den Fall b) einsetzen, mit $k = \text{fct}(z, t) \rightarrow$ im Bodenniveau z^* $k \neq \text{fct}(t) \rightarrow$ daher mit der WLG berechenbar. Bedeutung vom vorgenannten Ausdruck



T über z Diagramm mit 2 Kurven zu den Zeiten t1 und t2

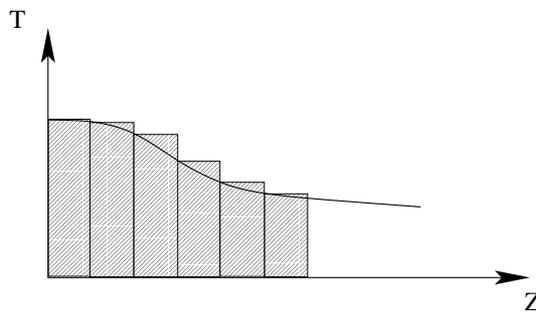
Die schraffierte Fläche multipliziert mit $\frac{\rho c}{\Delta t}$ ist gerade gleich der Differenz der Bodenwärmeströme, d.h. gleich dem der Bodenschicht von 0 bis z^* zu-/abgeführten Bodenwärmestrom.

Reale Messung: Temperaturen an/in diskreten Punkten/Tiefen $T(t_i, z)$, z.B.

$$\begin{aligned} z_0 &= 0cm \\ z_1 &= 2cm \\ z_2 &= 4cm \\ z_3 &= 8cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_4 &= 16\text{cm} \\
z_5 &= 32\text{cm} \\
z_6 &= 64\text{cm}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{G0} &= \frac{\Delta}{\Delta t} \sum \rho c T_i \Delta z_i + H_{G*} \\
H_{G0} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left(\sum \rho c T(t_2, z_i) \Delta z_i - \sum \rho c T(t_1, z_i) \Delta z_i \right) - k \left(\frac{\Delta T}{\Delta z} \right)_{z*}
\end{aligned}$$



T über z Diagramm: Näherung der Fläche unter der Kurve durch (Ober- oder Unter-)Summen

T_0 : Oberflächentemperatur

1. unbewachsenem Boden: Strahlungsthermometer
2. bewachsener Boden: Extrapolation der Bodentemperaturprofile Temperatur-Extrapolation:
Vorschlag von Berz:

$$\frac{dT_0}{dt} = 2 \cdot \frac{dT_2}{dt} - \frac{dT_5}{dt}$$

mit T_5 = Temperatur in 5 cm Tiefe
mit T_2 = Temperatur in 2 cm Tiefe
mit T_0 = Oberflächentemperatur

Bewertung Tautochronenmethode:

- Bis vor kurzem die Methode
- Einstellbar unter den Voraussetzungen
 - Zeitlicher Konstanz der Bodenverhältnisse
 - Möglichst hochaufgelöster Tautochronenprofile
- Durch die benötigten Bodenproben zur Bestimmung von ρ und c ist Methode durch einen gewissen Aufwand gekennzeichnet

5.3 Ermittlung von Bodeneigenschaften mit Hilfe der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung

5.3.1 Schwingungen (unvollständig)

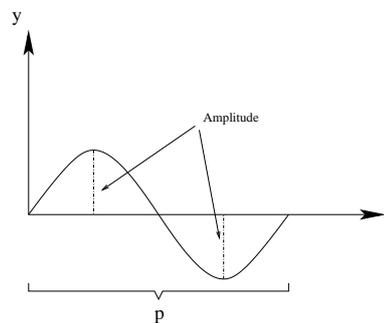
1. Def. Schwingung

Eine zeitlich periodische Änderung eines oder mehrerer Größen in einem physikalischen System.

Eine Schwingung tritt dann auf, wenn der Gleichgewichtszustand derart gestört wird, daß rücktreibende Kräfte wirksam werden.

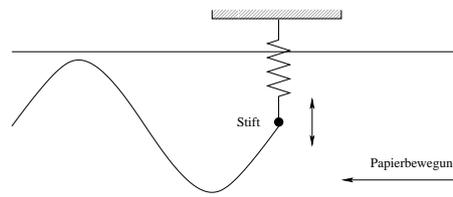
2. Begriffe

- Auslenkung/Elongation y
Abstand eines Körpers von der Ruhelage.
Es gilt: $y = Y(t)$
- Amplitude A
Größtmögliche Auslenkung
Bei ungedämpfter Schwingung gilt: $A \neq A(t)$
- Schwingungsdauer/Periode p
Zeit die für eine volle Schwingung erforderlich ist
- Frequenz ν
Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit $\nu = \frac{1}{p}$

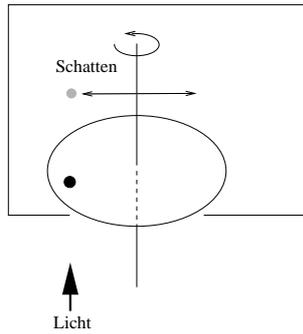


3. Beispiele von Schwingungen

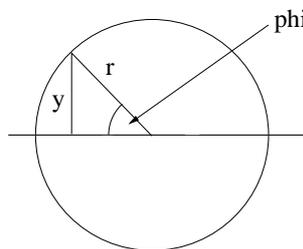
- Federpendel



- Projektion eines Gegenstandes, der sich auf einer gleichförmig rotierenden Scheibe befindet, auf eine Fläche, die parallel zur Rotationsachse angebracht ist



- Sinusschwingungen/harmonische Schwingungen haben sehr große Bedeutung
- Kreis mit Radius r und y als Auslenkung



$$y = r \cdot \sin(\varphi) \quad ; \quad r \equiv A$$

$$y = A \cdot \sin(\varphi) \quad ; \quad \varphi = \varphi(t)$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\nu$$

$$\varphi = \omega \cdot t = \frac{2\pi}{p}t$$

$$\text{bzw. } \varphi = \frac{2\pi}{p}t +$$

$\underbrace{\varphi_0}_{\text{Phasenverschiebung}}$

$$\hookrightarrow y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \text{Schwingungsgleichung}$$

5.3.2 Analytische Lösung der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung

1.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

2. 1. hat als Lösung

$$T = T_{m(z)} + A_s e^{(-\frac{z}{d})} \sin \left\{ \frac{2\pi}{p}(t - t_m) - \frac{z}{d} \right\}$$

$$T = T_{(z,t)}$$

$T_m = T_{m(z)}$ Mitteltemperatur in Niveau z (z.B. Tagesmitteltemperatur)

A_s = Amplitude an Bodenoberfläche

z = Tiefe

p = Periode der Schwingung

t = Zeit

t_m = Zeitpunkt zu dem $T = T_m$ ist

d = Dämpfungstiefe; Maß für die Eindringtiefe der Temperaturwelle $d = \left(\frac{p \cdot \alpha}{\pi}\right)^{1/2}$

3. Anwendung auf Bodenoberfläche

$$T_0 = T_{m0} + A_s \sin \left\{ \frac{2\pi}{p}(t - t_m) \right\}$$

4. Annahme für Gültigkeit der Lösung

- Oberflächentemperaturverlauf als eine sinusförmige Schwingung (eigentlich Summe von e - Funktionen)
- Boden sei über gesamte betrachtete Schicht homogen

5. Aus Lösung folgt

(a) Amplitude $A = A_s \cdot e^{-z/d}$

↪ Amplitude $A = f(z)$

Amplitude ändert sich exponentiell mit z

Beispiel: $z = d \rightarrow A = \frac{A_s}{e} = 0,37A_s$

$z = 3d \rightarrow A = \frac{A_s}{e^3} = 0,05A_s$

(b) Periode

$p \neq p(z)$, p ändert sich nicht mit Tiefe

(c) Phasenverschiebung als $f(z)$

$f_0 = \frac{z}{d}$

Für $z = \pi \cdot d$ Phasenumkehr. D.h. in Tiefe $z = \pi \cdot d$ ist z.B. Temperaturminimum zu beobachten, während gleichzeitig an Bodenoberfläche ein Maximum herrscht

(d) Phasenverschiebung kann in Zeitverschiebung (ZV) umgerechnet werden.

$\frac{\varphi_0}{2\pi} = \frac{ZV}{p}$ mit $\varphi_0 = \frac{z}{d}$

$\Rightarrow ZV = \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{z}{d}$

(e) Anwendbarkeit der Lösung

Sowohl für tägliche als auch für jährliche Temperaturwelle

Für Jahreswelle gilt in mittleren Breiten:

$d_i = \sqrt{365}d_t = \sqrt{365} \sqrt{\frac{p\alpha}{\pi}} = \sqrt{\frac{365p\alpha}{\pi}}$

$d_i = \frac{p'\alpha}{\pi}$

$p' = 365p$ / p' = Periode der Jahreswelle

(f) Beispielabschätzung für d für Tagesgang ($p = 86400s$)

$d = \sqrt{\frac{p\alpha}{\pi}}$ mit $\alpha = 0,24 \cdot 10^6 \frac{m^2}{s}$

$d = 0,081m$

Tiefe, in der die Phase um π verschoben ist. $z_p = \pi \cdot d = 0,25m$

Amplitudenverhältnisse in dieser Tiefe

$A = A_s \cdot e^{-\frac{z}{d}} \rightarrow \frac{A_0}{A_s} = e^{-\pi} = 0,043$

$\Rightarrow A = 0,043A_s$

6. Bestimmen der Dämpfungstiefe d
 Mit dem 10-er Logarithmus (lg):

$$\begin{aligned}
 A &= A_s \cdot e^{-\frac{z}{d}} \\
 lg A &= lg \left(A_s \cdot e^{-\frac{z}{d}} \right) \\
 &= -\frac{z}{d} lg e + lg A_s \\
 A &= \frac{\Delta T_{ext}}{2} \\
 A_s &= \frac{\Delta T_{0,ext}}{2} \\
 lg \left(\frac{\Delta T_{ext}}{2} \right) &= \underbrace{-\frac{z}{d} lg e}_{\text{Steigung}} \cdot z + \underbrace{lg \left(\frac{\Delta T_{0,ext}}{2} \right)}_{\text{Ordinatenabschnitt}} \Rightarrow d
 \end{aligned}$$

Die Gleichung mit dem natürlichen Logarithmus (ln):

$$ln \left(\frac{\Delta T_{ext}}{2} \right) = -\frac{z}{d} + ln \left(\frac{\Delta T_{0,ext}}{2} \right) \Rightarrow d$$

7. Bestimmen der thermischen Leitfähigkeit α

$$\alpha = \frac{\pi \cdot d^2}{p} = \frac{2 \pi \cdot d^2}{2 p} = \frac{2 \pi}{p} \cdot \frac{1}{2} d^2$$

für d gilt: $ln A = -\frac{z}{d} + ln A_0$

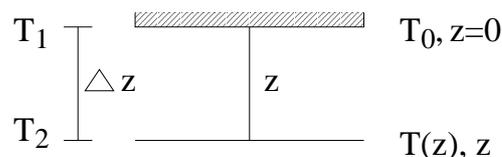
$$\rightarrow d = -\frac{z}{ln A - ln A_0}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{\omega}{2} \left(-\frac{z}{ln A - ln A_0} \right)^2 = \frac{\omega}{2} \left(-\frac{ln A}{ln A_0} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{T_{ext}}{2} = \frac{T_{max} - T_{min}}{2} \\
 A_0 &= \frac{T_{0,ext}}{2} = \frac{T_{0,max} - T_{0,min}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\omega}{2} \left(-\frac{z}{ln \frac{\Delta T_{ext}}{\Delta T_{0,ext}}} \right)^2 \quad A_0 = A_s$$

Wenn anstelle T_0 (Oberflächentemperatur) eine Temperatur in der Tiefe $i = 1$ verwendet wird, so steht anstelle z ein $\Delta z = z_{i-1} - z_i$.



Zur Erklärung von $z(i-1)-z(i)$

$$\Rightarrow \boxed{k = \alpha \cdot \rho \cdot c}$$

Mit diesem k ist somit der Bodenwärmestrom im Niveau z^* bestimmbar über die Newtonsche Wärmeleitungsgleichung:

$$H_G^* = -k \left(\frac{\Delta T}{\Delta z} \right)_{z^*}$$

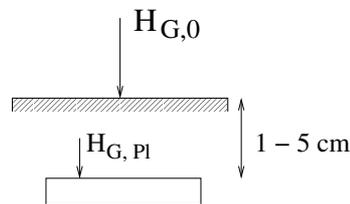
5.4 Wärmestromplatten (heat flux plates)

1. Plattenaufbau / -eigenschaften

- kleine flache Platten (etwa 5 cm * 5 cm * 0,5 cm)
- niedrige Wärmekapazität
- bekannte Wärmeleitfähigkeit k
- Thermoelement , ΔT wird über die Platte gemessen

2. Handhabung

Einbringtiefe: ca. 1-5 cm



Einbringtiefe Skizze

3. Wärmestrombestimmung

$$H_{G0} = H_{Pl} + \int_0^{z_i} \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) dz$$

4. Funktionsprinzip Platte

$$H_{Pl} = -k_{Pl} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta z_{Pl}}$$

mit Δz_{Pl} = Plattenhöhe , k_{Pl} = Wärmeleitfähigkeit der Platte , ΔT = Temperaturdifferenz über die Platte

Voraussetzung: $k_{Platte} \approx k_{Boden}$

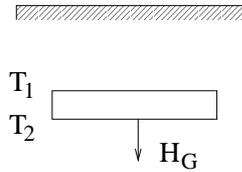
5. Bestimmung von H_{Pl}

$$H_{Pl} = -k_{Pl} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta z_{Pl}}$$

→ Spannung $U_{Pl} = Const \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{U_{Pl}}{Const}$

$$H_{Pl} = -\frac{k_{Pl}}{\Delta z_{Pl}} \cdot \frac{U_{Pl}}{Const} \rightarrow H_{Pl} = -Konst \cdot U_{Pl}$$

mit $Konst = \frac{k_{Pl}}{\Delta z_{Pl} \cdot Const}$



Skizze mit T_1 und T_2 über die Platte : $H_g = -k(T_2 - T_1)/(z_2 - z_1)$

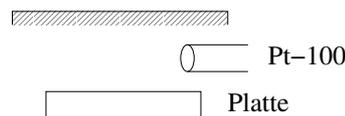
Erfahrungen (unkalibriert):

Hersteller: Platten direkt verwendbar, Fehler $\approx 20\%$

Untersuchungen: Fehler herstellerabhängig, Fehler: 5% bis unbrauchbar

Empfehlung:

Energieänderung der Schicht über der Platte zu bestimmen durch Messung der Temperatur T .

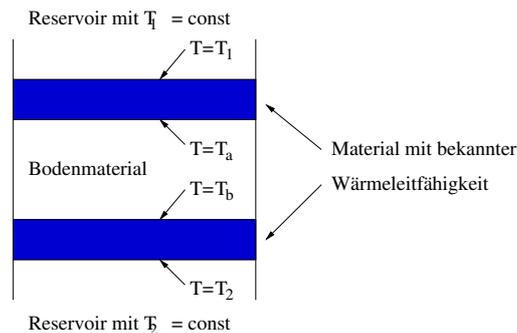


Einbringtiefe mit Pt-100 thermometer

Kalibrierte Wärmestromplatte

(a) Kalibrieren

Laboraufbau zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Bodens



Laboraufbau zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Bodens

Voraussetzungen für Kalibrierung:

- Kenntnis der Wärmeleitfähigkeit der Bodenmaterialien, die für die Kalibrierung benutzt werden oder Kenntnis eines anliegenden Wärmestromes
- Kalibrierung findet unter stationären Verhältnissen statt
- $T_1 > T_2$

- aus den Temperaturen T_1 und T_a folgt bei vorausgesetzt bekannter Leitfähigkeit des blauen Materials der gesuchte Wärmestrom. Dieser kann nochmals mittels T_b und T_2 bestimmt / kontrolliert werden.
- aus Bodenwärmestrom sowie T_a, T_b folgt aus der Wärmeleitungsgleichung die Leitfähigkeit des Bodens

Erweiterung der Anordnung zur Plattenkalibrierung:

- Platte wird in den Boden eingebracht

Plattenkalibrierung (2 Punkte):

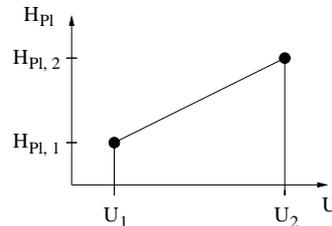
- Platte wird nacheinander in 2 Böden mit bekannter Wärmeleitfähigkeit kalibriert
- Platte gibt Spannung U ab

$$H_{Pl} = \underbrace{Konst}_{C'} \cdot U_{Pl}$$

$$\text{Boden 1: } H_{Pl,1} = C_1 \cdot U_1$$

$$\text{Boden 2: } H_{Pl,2} = C_2 \cdot U_2$$

Die Konstanten C_1 und C_2 können identisch sein, müssen es aber nicht, da hier ein linearer Zusammenhang unterstellt wurde, der jedoch nur in guter Näherung richtig ist.



Plattenkalibrierung, lineare Verhältnisse werden angenommen

$$\text{Steigung ist gegeben durch: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta H_{Pl}}{\Delta U} = \frac{H_{Pl,2} - H_{Pl,1}}{U_2 - U_1}$$

$$\Rightarrow \text{allgemein: } H_{Pl} = \frac{H_{Pl,2} - H_{Pl,1}}{U_2 - U_1} \cdot U$$

$$H_{Pl} = Konst \cdot U_{Pl} \text{ mit } Konst = \frac{H_{Pl,2} - H_{Pl,1}}{U_2 - U_1} \text{ entspricht der Steigung}$$

$H_{Pl,1}, H_{Pl,2}$ sind Bodenwärmeströme von Kalibrierung in den Medien 1 und 2.

U_1, U_2 sind die zugehörigen Spannungen.

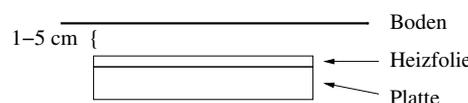
(b) Selbstkalibrierende Wärmestromplatten

Ziel:

Empfindlichkeitsmaß ausgedrückt durch Term C ($B = C \cdot U$) durch fortwährende Kalibrierung zu bestimmen.

Aufbau einer selbstkalibrierenden Wärmestromplatte:

Übliche Wärmestromplatte mit einseitig aufgebrachter Heizfolie.



Funktion:

- Messung von $H_{G,Pl}$
- Heizfolie während Messung nicht beheizt
- Kalibrierung mehrmals am Tag mit bekannter Heizleistung \rightarrow Reaktion der Platte auf bekannten Einfluß

(c) Zusammenfassung und Resumee

i. Wärmeleitungsgleichung (Newton)

scheidet aus, da gegebenenfalls große zeitliche Variabilität der oberflächennahen Bodenwärmeleitfähigkeit.

ii. Tautochronenmethode

- Wärmestrombestimmung möglich
- Großer Aufwand (Bodenprobe und Laborbestimmung von ρ und c)
- Bei Änderungen und Eigenschaftsänderungen des Bodens z.B. infolge von Niederschlag \rightarrow neue Probe notwendig

iii. Wärmestromplatten

A. Es sollten nur Platten mit bekanntem, geringem Fehler verwendet werden, oder

B. kalibrierte / selbstkalibrierende Platten

- Empfehlung 1:

Aufnahme der Temperatur der Schicht oberhalb der Platte. Hierzu muss korrekterweise Bodenprobe zur Bestimmung von Dichte ρ und der spezifischen Wärmekapazität c genommen werden.

- Empfehlung 2:

Immer mehrere Platten gleichzeitig einsetzen (Erfassung der räumlichen Inhomogenität)

Resumee

Bodenwärmestrombestimmung ist keine triviale Angelegenheit.

6. Sverdrup - Methode / Bowen - Ratio - Methode

(a) Methode zur Bestimmung der Ströme fühlbarer und latenter Wärme

(b) Definition: $Bo = \frac{H}{H_L}$ = Strom fühlbarer Wärme / Strom latenter Wärme

(c) Beschreibung von H und H_L mittels Gradientansatz:

$$H = -\rho \cdot c_p \cdot K_H \cdot \frac{\Delta T}{\Delta z}$$

ρ = Dichte (Luft)

c_p = spezifische Wärme (Luft) bei $p = \text{const}$

K_H = turbulenter Diffusionskoeffizient

ΔT = Temperaturdifferenz über Δz

ΔZ = Höhendifferenz

Anmerkung: Die Thermometergleichung $L = -\alpha \cdot \Delta T = -\alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_L)$ ist dennoch

korrekt. $\Delta T/\Delta z$ muss hier nicht beachtet werden, da das Thermometer komplett von einer Luftmasse umströmt wird. Bei Messungen an einem Mast in verschiedenen Höhen hingegen ist $\Delta T/\Delta z$ unbedingt zu beachten.

$$H_L = -\rho \cdot L_v \cdot K_L \cdot \frac{\Delta q}{\Delta z}$$

Δq = Differenz der spezifischen Feuchte

Δz = Höhendifferenz

K_L = turbulenter Diffusionskoeffizient (nicht zwingend gleich mit dem von H (K_H), aber meistens)

L_v = Verdampfungswärme

(d) Bowen - Verhältnis

$$Bo = \frac{H}{H_L} = \frac{-\rho \cdot c_p \cdot K_H \cdot \frac{\Delta T}{\Delta z}}{-\rho \cdot L_v \cdot K_v \cdot \frac{\Delta q}{\Delta z}} \quad \text{mit } \rho, K, \Delta z \text{ gleich}$$

$$\Rightarrow Bo = \frac{c_p \cdot \Delta T}{L_v \cdot \Delta q}$$

Das Bowen - Verhältnis ergibt sich durch Messung von ΔT und Δq . Über die Höhendifferenz Δz , über die ΔT und Δq zu messen sind, macht diese Gleichung keine Aussage. Die Erfahrung zeigt, Δz sollte so groß sein, daß ΔT bzw Δq gut messbar sind (z.B. $\Delta z \approx 4m$ bei bodennahen Bedingungen, weiter oben wird ein größeres Δz benötigt).

(e) Bestimmung von H_L

$$R_N = H + H_L + H_G$$

$$R_N - H_G = H + H_L$$

$$H_L \left(\frac{H}{H_L} + 1 \right) = R_N - H_G \quad \text{mit } \frac{H}{H_L} = Bo$$

$$H_L = \frac{R_N - H_G}{Bo + 1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H_L}} = \underline{\underline{\frac{R_N - H_G}{\frac{c_p \Delta T}{L_v \Delta q} + 1}}}$$

→ H_L Bestimmbar durch Messung von:

R_N (Strahlungsbilanz)

H_G (Bodenwärmestrom)

ΔT (Temperaturdifferenz)

Δq (Differenz der spezifischen Feuchte)

(f) Bestimmung von H

$$R_N - H_G = H + H_L$$

$$H \left(\frac{H_L}{H} + 1 \right) = R_N - H_G \quad \text{mit } \frac{H_L}{H} = \frac{1}{Bo}$$

$$H = \frac{R_N - H_G}{\frac{1}{Bo} + 1} = \frac{R_N - H_G}{\frac{Bo+1}{Bo}}$$

$$H = \frac{Bo(R_N - H_G)}{Bo + 1}$$

$$\Rightarrow H = \frac{\frac{c_p \Delta T}{L_v \Delta q} (R_N - H_G)}{\frac{c_p \Delta T}{L_v \Delta q} + 1}$$

In den Gleichungen von H und H_L ist keine Windabhängigkeit enthalten.

Erfahrung zeigt:

oberes Niveau $|\vec{v}| > 1m/s$

unteres Niveau $|\vec{v}| > 0,3m/s$

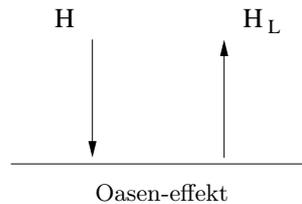
Problem:

$$H_L = \frac{R_N - H_G}{Bo + 1}$$

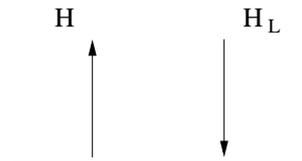
$$H = \frac{Bo(R_N + H_G)}{Bo + 1}$$

Wenn $Bo = -1$, dann sind beide Gleichungen unbestimmt. $Bo = -1 = \frac{H}{H_L} \rightarrow H = -H_L$, dann Sverdrup nicht anwendbar.

- i. Warme trockene Luft strömt über feuchte kühle Unterlage



- ii. Kalte feuchte Luft strömt über warme trockene Unterlage



- iii. Morgendliche / abendliche Situation, wenn Vorzeichenwechsel von H und H_L nicht gleichzeitig geschieht.

Fallunterscheidung			
1.	$Bo > 0$	$H > 0$	$H_L > 0$
2.	$Bo > 0$	$H < 0$	$H_L > 0$
3.	$Bo < 0$	$H > 0$	$H_L < 0$
3.1.	$1 + Bo > 0$		
3.2.	$1 + Bo < 0$		
4.	$Bo < 0$	$H < 0$	$H_L > 0$
4.1.	$1 + Bo > 0$		
4.2.	$1 + Bo < 0$		

Vorteil dieser Methode H und H_L kann mittels langsamer Messgeräte ermittelt werden ($\Delta \bar{T}$; $\Delta \bar{q}$) \rightarrow einfache, billige Messgeräte verwendbar.

Neben der Sverdrup / Bowen - Ration - Methode zur Bestimmung von H und H_L , gibt es weitere Methoden (Aerodynamische Methode, Profilmethode, usw.), die hier aber nicht weiter erläutert werden.

7. Eddy - Korrelationsmethode

Synonyme: Eddy - Fluktuationmethode oder Eddy - Kovarianzmethode

- (a) Die momentane vertikale Flußdichte S einer beliebigen atmosphärischen Größe kann bestimmt werden durch:

$$S = \rho \cdot w \cdot s$$

S = Momentanwert der Flußdichte

ρ = Luftdichte

w = Momentanwert der vertikalen Geschwindigkeit

s = Momentanwert der betrachteten Größe

Beispiel: $s = c_p \cdot T$

$$S = \rho \cdot w \cdot c_p \cdot T \equiv H$$

$$\frac{J}{m^2 s} = \frac{kg}{m^3} \frac{m}{s} \frac{J}{kg K} K = \frac{J}{m^2 s}$$

Die Einheiten einer Flußdichte.

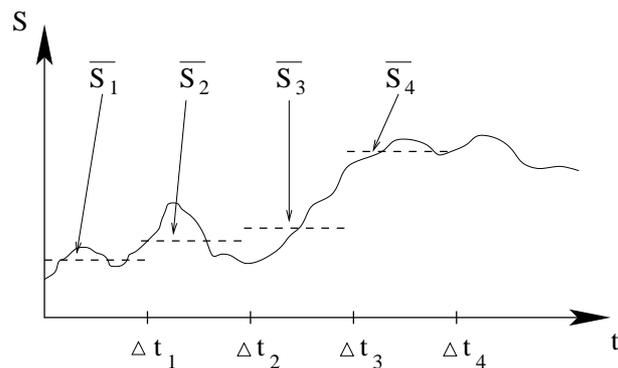
- (b) Mittlere Flußdichten

$$\bar{S} = \overline{\rho \cdot w \cdot s}$$

- (c) Alle Momentanwerte (s) können dargestellt werden als Summe von zeitlichen Mittelerten (\bar{s}) und Momentanwertabweichungen (s'):

$$s = \bar{s} + s'$$

Achtung: \bar{s} kann $f(t)$ sein!



- (d) Darstellung der Momentanwerte durch zeitliches Mittel und Abweichung.

$$S = \rho \cdot w \cdot s$$

$$S = (\bar{\rho} + \rho') \cdot (\bar{w} + w') \cdot (\bar{s} + s')$$

Mittelung über t : (formal)

$$\bar{S} = \overline{(\bar{\rho} + \rho') \cdot (\bar{w} + w') \cdot (\bar{s} + s')}$$

(e) Regeln für die Mittelung

i. $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$

Das Mittel einer Summe ist gleich der Summe der Mittel.

ii. $\overline{k \cdot a} = k \cdot \bar{a}$

für $k = \text{const} \Rightarrow \bar{k} = k$

Das Mittel eines konstanten Faktors ist gleich dem Faktor.

iii. $\overline{(\bar{a})} = \bar{a}$

Das Mittel eines Mittels ist gleich dem Mittel.

iv. $\overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

(f) Beweise der Regeln:

i. zu 1.) :

$$\begin{aligned}\overline{a + b} &= \bar{a} + \bar{b} \\ \overline{a + b} &= \frac{1}{P} \int_0^P (a + b) dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{P} \int_0^P a dt}_{\bar{a}} + \underbrace{\frac{1}{P} \int_0^P b dt}_{\bar{b}} \\ \overline{a + b} &= \bar{a} + \bar{b}\end{aligned}$$

mit P als Periode

ii. zu 2.) :

$$\begin{aligned}\overline{k \cdot a} &= k \cdot \bar{a} \\ \bar{k} &= \frac{1}{P} \int_0^P k dt = \frac{1}{P} \cdot kP = k \\ \Rightarrow \bar{k} &= k\end{aligned}$$

iii. zu 3.) :

$$\begin{aligned}\overline{(\bar{a})} &= \bar{a} \\ \bar{a} &= \frac{1}{P} \int_0^P a dt \\ \overline{(\bar{a})} &= \frac{1}{P} \int_0^P \bar{a} dt = \frac{\bar{a}}{P} \int_0^P dt = \frac{\bar{a} \cdot P}{P} = \bar{a}\end{aligned}$$

\bar{a} kann nach vorne gezogen werden, da \bar{a} keine Funktion der Zeit ist.

iv. zu 4.) :

$$\overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

Beweis ist analog zu iii. führen.

Durch Ausmultiplizieren und Anwendung der Regeln:

$$\Rightarrow \bar{s} = \overline{\bar{\rho} \bar{w} \bar{s}} + \underbrace{\overline{\bar{\rho} \bar{w} s'}}_{=0, \bar{s}'=0} + \underbrace{\overline{\bar{\rho} w' \bar{s}}}_{=0, \bar{w}'=0} + \underbrace{\overline{\rho' \bar{w} \bar{s}}}_{=0, \rho'=0} + \overline{\bar{\rho} w' s'} + \underbrace{\overline{\rho' \bar{w} s'}}_{=0, \rho'=0} + \underbrace{\overline{\rho' w' \bar{s}}}_{=0, \rho'=0} + \underbrace{\overline{\rho' w' s'}}_{=0, \rho'=0}$$

mit den Bedingungen:

$\bar{w}' = 0$, $\bar{s}' = 0$, $\overline{w' s'} \neq 0$, $\rho' = 0$, da inkompressibel $\rho = \text{const}$, $\bar{w} = 0$, d.h. keine mittlere Vertikalgeschwindigkeit

$$\Rightarrow \bar{S} = \bar{\rho} \cdot \overline{w' s'}$$

mit $\bar{\rho} = \rho$, $\rho = \bar{\rho} + \underbrace{\rho'}_{=0}$

$$\Rightarrow \bar{S} = \rho \cdot \overline{w' s'}$$

Hier sind 3 Fälle zu unterscheiden:

a) $s' = c_p \cdot T' \Rightarrow \bar{S} = H = \rho c_p \cdot \overline{w' T'}$

Das beschreibt die Flußdichte der fühlbaren Wärme.

b) $s' = L_v \cdot q' \Rightarrow \bar{S} = H_L = \rho L_v \cdot \overline{w' q'}$

Das beschreibt die Flußdichte latenter Wärme.

c) $s' = -u' \Rightarrow \bar{S} = \tau = -\rho \cdot \overline{w' u'}$

Das beschreibt die Flußdichte der Impulses.

\Rightarrow Die Bestimmung der Flüsse erfolgt durch Messungen. Die Gleichungen verlangen die Kenntnis der Strichgrößen, d.h. die momentanen Abweichungen zum jeweiligen Mittelwert. In der Praxis geschieht dies so, dass der Momentanwert hochfrequent (z.B. 20 Hz, 32 Hz) aufgenommen wird. Damit wird der Mittelwert über eine Zeitspanne Δt bestimmt und daraus die Strichgrößen.

$$s' = s - \bar{s}$$

mit s dem gemessenen Wert (Momentanwert), \bar{s} dem berechneten Mittelwert und s' der berechneten Strichgröße.

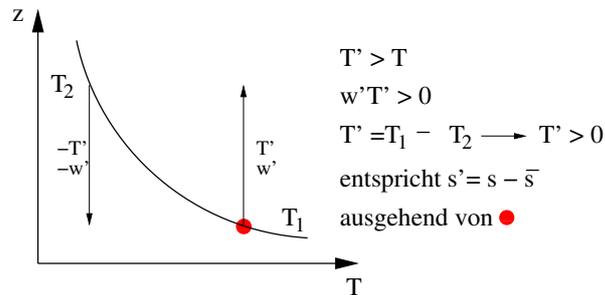
Beispiele für hochfrequente Messungen/Messgeräte:

Temperatur T' : Ultraschallanemometer, Thermoelemente, schnelles Pt-100 (hauptsächlich bei Flugzeugen)

Feuchte q' : Lyman- α -Messgerät

Wind w' , u' : Ultraschallanemometer

Transportprinzip



⇒ aus Kontinuitätsgründen (Masseerhaltung, keine Luftlöcher) muss ein Turbulenzelement absinken, wenn woanders eins aufsteigt

$$H = \rho c_p \cdot \overbrace{w'T'}^{>0} \text{ mit } T' = T_1 - T_2 \quad T_{1/2} = \text{Mittel im jeweiligen Niveau } T_1 \text{ oder } T_2 \text{ und } s' = s - \bar{s} \Rightarrow H > 0$$

Für stabile Verhältnisse ist es analog.

(g) Nützliche Beziehungen:

a) Varianz

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s_i - \bar{s})^2$$

mit s_i den gemessenen Momentanwerten und \bar{s} dem Mittelwert.

Die Varianz ist ein Maß für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert.

$$s' = s - \bar{s} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i'^2 = \overline{s'^2}$$

→ Wann immer das Mittel des Quadrates einer Strichgröße betrachtet wird, so kann dies als Varianz angesehen werden. Beispiele: $\overline{u'^2}$, $\overline{q'^2}$, $\overline{\Theta'^2}$

b) Kovarianz

bezeichnet den Grad der Beziehung zwischen 2 Variablen.

$$\begin{aligned} cov(a, b) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underbrace{(a_i - \bar{a})}_{a'_i} \cdot \underbrace{(b_i - \bar{b})}_{b'_i} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a'_i \cdot b'_i \\ cov(a, b) &= \overline{a' \cdot b'} \end{aligned}$$

7.2 Kinematische Flußdichten

Bislang wurden folgende turbulente Flußdichten betrachtet:

$$H = \varrho \cdot c_p \cdot K_H \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$$

$$H_L = \varrho \cdot L_v \cdot K_L \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}$$

Weitere durch Turbulenz verursachte Flußdichten von Interesse:

$$MFD = \varrho \cdot v \quad \left[\frac{kg}{m^2 s} = \frac{kg}{m^3} \frac{m}{s} \right]$$

Beispiele:

1. Wasserdampfstromdichte

Ergibt sich aus H_L , indem durch L_v dividiert wird.

$$WDS = \frac{H_L}{L_v} = \varrho \cdot \overline{w' \cdot q'} = \varrho \cdot K_L \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \quad \left[\frac{kg}{m^2 s} \right]$$

2. Impulsflußdichte

Definition: Vertikale Flußdichte von horizontalem Impuls, der von der Atmosphäre an die Erdoberfläche (Boden; Wasser) übertragen wird. Die Impulsflußdichte ist identisch der Schubspannung τ .

$$\tau = -\varrho \cdot \overline{u' \cdot w'}$$

$$\tau = -\varrho \cdot K_m \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$$\tau = -\varrho \cdot u_*^2$$

Wobei u_* die Schubspannungsgeschwindigkeit ist ($\bar{u}_* = (\overline{u' \cdot w'})^{1/2} \quad \bar{u}_* \neq f(z)$).

3. Spurenflußdichte \equiv Massenflußdichte

Kinematische Flußdichten:

Die gemischten Flußdichten, z.B. H , H_L , τ werden nicht direkt gemessen. Gemessen werden Größen wie \bar{T} , \bar{u} , \bar{q} . Das bedeutet, man definiert sich die kinematische Formen der Flußdichten.

Diejenigen Flußdichten, wie man sie durch Messung ermittelt.

kinematische Flußdichte $H_{kin} = \varrho \cdot c_p \cdot \frac{\overline{w' \cdot u'}}{\varrho \cdot c_p} = \overline{w' \cdot u'}$

kinematische Flußdichte $H_{L kin} = \varrho \cdot L_v \cdot \frac{\overline{w' \cdot q'}}{\varrho \cdot L_v} = \overline{w' \cdot q'}$

kinematische Flußdichte $\tau_{kin} = -\varrho \cdot \frac{\overline{w' \cdot u'}}{\varrho} = -\overline{w' \cdot u'}$

8.1 Windgeschwindigkeits-Profile

In der Meteorologie gibt es üblicherweise zwei Methoden zur Bestimmung von Windgeschwindigkeitsprofilen (Betrag $v = f(z)$: $|\vec{v}| = f(z)$, Richtung spielt keine Rolle). In der Prandtl-Schicht:

1. Potenzprofil (power law)
2. Logarithmisches Windprofil

1. Potenzprofil

$$\bar{u}(z) = \bar{u}(z_r) \left(\frac{z}{z_r} \right)^m$$

$\bar{u}(z)$: mittlere Geschwindigkeit im Niveau z

$\bar{u}(z_r)$: mittlere Geschwindigkeit in Referenzniveau

z_r : Höhe Referenzniveau über Grund

z : Höhe über Grund

m : Exponent

Als Referenzniveau wird sehr häufig eine Höhe von 10m genommen, da dort üblicherweise ein Anemometer an meteorologischen Stationen angebracht ist.

Größenordnung von m :

$m = 0,05$ für stark labile Schichtung

$m = 0,15$ für neutrale Schichtung

$m = 0,5$ für stark stabile Schichtung

Vorteile von Potenzprofilansatz:

- $\bar{u}(z)$ kann bestimmt werden bei Kenntnis einer Windgeschwindigkeit in einer Höhe
- Exponent muss bekannt sein, d.h. Exponent muss anderweitig bestimmt werden
- Formel ist rein empirisch, keine physikalische Basis

2. Logarithmisches Windprofil

Diese Methode basiert auf Bewegungsgleichungen.

Bewegungsgleichung in Indexschreibweise:

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k}}_{\text{Trägheitskraft}} = \underbrace{-\epsilon_{ijk} \cdot f_j \cdot \bar{u}_k - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}}_{\text{Volumenkräfte}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial (u'_k \cdot u'_i)}{\partial x_k}}_{\text{Oberflächenkräfte}}$$

ϵ_{ijk} : alternierender Einheitstensor

$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$

$\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$

ansonsten gilt $\epsilon_{ijk} = 0$

Volumenkraft wirkt auf das gesamte Volumen, z.B. Schwerkraft

Oberflächenkraft wirkt auf die Oberfläche des betrachtete Teilchens, z.B. Druckgradientkraft.

Annahmen:

- (a) Stationarität $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = 0$
- (b) Horizontale Homogenität $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = 0$, außer für $k = 3$
- (c) Keine mittlere Vertikalgeschwindigkeit: $\bar{w} = \bar{u}_3 = 0$
aus b) und c) für $k = 1$ und $k = 2 \hookrightarrow \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = 0$
mit $k = 3 \hookrightarrow \bar{u}_3 = \bar{w} = 0$
 $\hookrightarrow \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}$
- (d) Corioliskraft in Prandtl-Schicht sei vernachlässigbar:
 $f = 0 \rightarrow -\epsilon_{ijk} \cdot f_j \cdot \bar{u}_k = 0$
- (e) Horizontaler Druckgradient sei vernachlässigbar:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} = 0$$

- (f) Molekulare Reibung unbeachtet:

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2} = 0$$

- (g) Horizontale Homogenität des turbulenten Impulsflusses:

$$\frac{\partial \overline{u'_k \cdot u'_i}}{\partial x_k} = 0$$

außer für $k = 3$

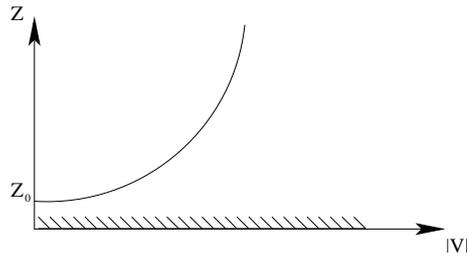
- (h) Strömung soll in x-Richtung verlaufen:

$$\Rightarrow 0 = -g - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}}_{=-g} - \frac{\partial \overline{u'_k \cdot u'_i}}{\partial x_k} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \overline{w' \cdot u'}}{\partial z} = 0}$$

$$\begin{aligned} d(\overline{-w' \cdot u'}) &= 0 \\ \overline{-w' \cdot u'} &= \frac{\tau}{\rho} = \text{const mit } z \\ \hookrightarrow \underbrace{\overline{-w' \cdot u'}}_{\text{in bel. Höhe } z} &= \underbrace{\overline{-w' \cdot u'_0}}_{\text{in Höhe } z_0} \end{aligned}$$

z_0 : Rauigkeitslänge: Diejenige Höhe in der die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u} = 0$ ist.



$$\frac{\tau_0}{\rho} = -\overline{w' \cdot u'} = u_*^2$$

Gradientansatz für τ

$$\tau = -\rho \cdot k_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\rho \overline{w' \cdot u'} = \rho \cdot u_*^2$$

$$\hookrightarrow u_*^2 = k_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

Mischungswegansatz für k_m (\bar{u}_c ist die charakteristische Geschwindigkeit)

$$k_m = l \cdot \bar{u}_c$$

$$\bar{u}_c = l^2 \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|$$

$$\hookrightarrow k_m = l^2 \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|$$

$$u_*^2 = l^2 \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2$$

$$u_* = l \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \text{ mit } l = \chi$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\chi} \frac{1}{z}$$

Durch Integration folgt:

$$\boxed{\bar{u} = \frac{u_*}{\chi} \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)}$$

Vorteile:

Beruhet auf Physik

Nachteile:

Wind wird in zwei Höhen benötigt, um ein Profil angeben zu können
Gleichung gilt nur für neutrale Bedingungen:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\chi} \left(\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) + \alpha \cdot \frac{z - z_0}{L} \right)$$

(Log-lin-Profil)

$\alpha = \text{const} \approx 5$

$L = \text{Monin - Obukhov - Länge}$

$L > 0$ stabil

$L \rightarrow \infty$ neutral

$L < 0$ labil

Literatur

[Arya]

Arya: Introduction to Micrometeorology

[Foken]

Foken: Angewandte Meteorologie

[Kraus]

Kraus: Die Atmosphäre der Erde

[Stull]

Stull: An Introduction to Boundary Layer Meteorology