Physik II

Elektrodynamik

Nach einer Vorlesung von
Prof. M. Wegener im SS 98

Vorwort:

Der vorliegende Text entstand im und nach dem Sommersemester 98 während Herrn Wegeners Vorlesung zur Elektrodynamik. Ähnlich dem 1. Skript, der Mechanik, habe ich auf Illustrationen (fast) ganz verzichtet. Der Aufwand hierfür erschien mir einfach zu groß. Man überlege sich nur: "Wer ließt eigentlich dieses Skript??" (oder dieses Vorwort).
Nachdem sich der Krampf meiner Hände vom vielen Formeltippen langsam löst möchte ich noch die üblichen Dinge anführen:
Dies Druckwerk ersetzt keine herkömmlichen Lehrbücher oder sogar die Vorlesung. Es dient als Hilfe und Erleichtung des Verständnisses (hoffentlich!). Es wurde auch nicht von Herrn Wegener abgesegnet (er weiß wahrscheinlich nicht mal von seiner Existenz).
Bei Fragen oder Bemerkungen kurzes eMail an

bernd.landwehr@gmx.de

Karlsruhe im Dezember '98

Bernd Landwehr

Widmen möchte ich dieses Skript einem schwäbischen Trompetenspieler, der ursprünglich weder die Vorlesung hören noch den Schein machen wollte (sich aber überzeugen lies).

5. Elektrodynamik

5.1 Was ist Elektrodynamik?

Nach dem in der Mechnik Kräfte diskutiert wurden, welche durch Masse erzeugt wurden, sollen in der Elektrodynamik Kräfte beschrieben werden, welche durch elektrische Ladung - neben der Masse eine weitere Eigenschaft der Materie - hervorgerufen werden.

Die hier beschriebenen elektrischen und magnetischen Felder sind hierbei Hilfgrößen.

5.2 Die Basisgröße Stromstärke

Basisgröße	Einheit	Symbol	rel. Genauigkeit
Stromstärke	Ampere	A	10^{-6}

1 Ampere ist die Stromstärke eines zeitlich unveränderlichen, elektrischen Stroms, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter von einander angeordneten, geradlinigen, unendlich langen Leiter, von vernachlässigbarem kleinem kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge elektrodynamisch die Kraft $\frac{1}{5.000.000}$ kg $\frac{m}{s^2}$ hervorrufen würde.

5.3 Ladungen und Ströme

Die elektrische Ladung tritt gequantelt auf, d.h.

$$Q = n \cdot e$$

wobei n $\in \mathbb{Z}$ und e die Elementarladung darstellt, mit dem Wert

$$e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}\,C$$

Eine direkte Konsequenz davon ist auch folgender Satz

> In einem abgeschlossenen System
> ist die Ladung eine Erhaltungsgröße.

Wird ein offenes System betrachtet, so wird die ab- bzw. zufließende Ladung im Zeitintervall Δt als ΔQ bezeichnet, wobei gilt:

$$I := \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

nach übergang zum Differentialquotient ergibt sich

$$I := \frac{d}{dt} Q = \dot{Q}$$

bzw.

$$Q(t) = Q(t_o) + \int_{t_o}^{t} I\,dt'$$

$$[Q] = A \cdot s = C \quad (Coulomb)$$

■ Spezialfall: Coulomb'sches Kraftgesetz

Wir betrachten zwei Ladungen Q_1und Q_2. Diese sind durch den Vektor $\vec{r}$ verbunden, dann gilt folgendes Gesetz

Coulomb-Kraft

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{(|\vec{r}|)^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

es beschreibt die Kraft auf Q_2, wenn $\vec{r}$ in Richtung Q_2zeigt, wobei

ϵ_o : Dielektrizitätskonstante des Vakuums

$$\epsilon_o = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

- Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab.

- Ungleichnamige Ladungen ziehen sich an.

5.3.1 Die Spannung und das Ohm'sche Gesetz

Um zwei ungleichnamige Ladungen, Q_1 und Q_2 =(Q) voneinander zu entfernen muß folgende Arbeit verrichtet werden:

$$W_{12} = -\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{Q_1 Q}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \vec{dr}$$

Wir definieren daher die Spannung U_{12}=U als Arbeit pro Ladung Q

$$U := \frac{W_{12}}{Q}$$

$$[U] = \frac{I}{A\,s} = V \quad \text{(Volt)}$$

■ Definition: Elektrische Leistung P

$$W = Q \cdot U$$

Falls U konstant ist, kann die Definition der Leistung aus der Mechanik umschreiben:

$$P := \frac{d}{dt} W = I \cdot U$$

$$[P] = \frac{I}{s} = AV =: W \quad \text{(Watt)}$$

■ Das Ohm'sche Gesetz

Rein aus der Phenomenologie kann man sagen, daß für gewisse Materialien gilt:

$$U = R \cdot I$$

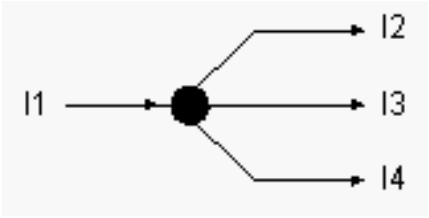
R: Elektrische Widerstand

$[R] = \frac{V}{A} =: \Omega$ (Ohm)

5.3.2 Die Kirchhoff'schen Regeln

... stellen eine Umformulierung von Ladungserhaltung und Energieerhaltung dar.

1. Kirchhoff'sche Regel: Knotenregel



Gilt die Ladungserhaltung, so kann man für ein stationären System sagen: Die Ladung Q_0 im betrachteten Konten ist zeitlich konstant.

Betrachten wir das Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ so gilt:

$$\Delta Q_0 = 0 = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 - \Delta Q_3 - \Delta Q_4$$

bzw.

$$\int_{t_1}^{t_2} I_1 \, dt - \sum_{n=2}^{4} \int_{t_1}^{t_2} I_n \, dt = 0$$

oder für die stationäre Situation

$$I_1 - \sum_{n=2}^{4} I_n = 0$$

Knotenregel:

Die Summer aller Ströme eines

Stromknotens ist identisch null.

■ Beispiel: Parallelschaltung

Zwei Widerstände R_1 und R_2 werden parallel geschaltet, es fließt I_1 und I_2.

Nach der Knotenregel gilt:

$$\mathbf{I = I_1 + I_2}$$

mit $I=\frac{U}{R}$ erhält man:

$$\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{R_1}} + \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{R_2}} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{R_{ges}}}$$

geteilt durch U ergibt sich

> Parallelschaltung von Widerständen
>
> $$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

2. Kirchhoff'sche Regel

> Maschenregel
>
> Die Summe aller treibenden Spannungen in einer Masche ist gleich der Summe aller Spannungsabfälle in der gleichen Masche

■ Beispiel: Serienschaltung

$$\mathbf{U_o = U_1 + U_2 = IR_1 + IR_2 = I \cdot R_{ges}}$$

> Serienschaltung von Widerständen
>
> $$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$$

■ Beispiel: Bereichserweiterung von Meßinstrumenten

Wir möchten Ströme der Größe 1 A messen, unser Meßgerät hält aber maximal Ströme der Größe I_i = 1 mA aus. In diesem Fall muß also der größte Teil des Stromes um das Meßgerät herum "umgeleitet" werden. Dies realisiert man durch einen Shunt-Widerstand R_s.

Laut Maschenregel gilt:

$$U_i = U_s$$

Nach dem Ohm'schen Gesetz kann man schreiben:

$$I_i \cdot R_i = I_s \cdot R_s$$

$$\Rightarrow R_s = \frac{I_i \cdot R_i}{I_s}$$

Knotenregel:

$$I = I_i + I_s$$

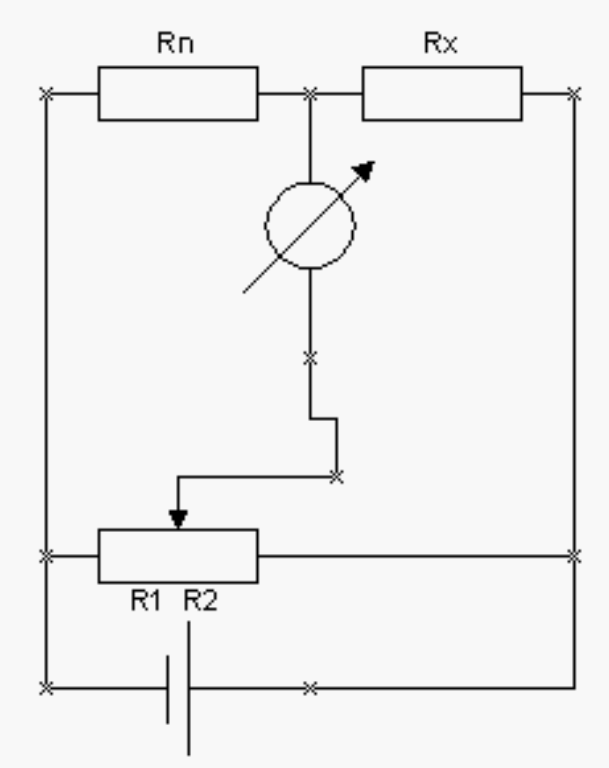
Zusammen ergibt sich

Meßbereichserweiterung

$$R_s = \frac{R_i}{\frac{I}{I_i} - 1}$$

In unserem Fall müßte also für einen Innenwiderstand $R_i = 1\,\Omega$ des Meßgerätes ein Shunt der Größe $1\,\mathrm{m}\Omega$ in Reihe geschaltet werden.

■ Beispiel: Wheatstone'sche Brücke



Steht das Meßgerät exakt auf Null, so gelten folgende Maschensätze

$$\mathbf{M1: R_n \cdot I_1 = -R_1 \cdot I_2}$$
$$\mathbf{M2: R_x \cdot I_1 = -R_2 \cdot I_2}$$

Nach dividieren der Gleichungen ergibt sich:

"Wheatstone-Gleichung"

$$R_x = R_n \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

Das heißt wenn R_n ein bekannter Referenzwiderstand ist, kann man den unbakannten Widerstand R_x so genau bestimmen, wie man das Streckenverhältnis von $R_{2:R_1}$ bestimmen kann.

⇒ Präzissionsmessung von Widerständen

5.4 Das zeitlich konstante elektrische Feld

5.4.1 Das elektrische Feld und das elektrostatische Potential

Wir definieren die elektrische Feldstärke als wirkende Kraft pro Ladung:

$$\vec{E} := \frac{\vec{F}}{Q}$$

$$[\mathrm{E}] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

■ Beispiel: Coulomb'sche Gesetz

Mit der Definition der Counlomb-Kraft erhält man z.B. das Feld einer Ladung Q_1, welches auf eine zweite Ladung Q_2wirkt.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_2} = \frac{1}{4\,\pi \cdot \epsilon_o} \cdot \frac{Q_1}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Eine anschauliche Darstellung des Feldes erhält man durch Verwendung von Feldlinien, sie zeigen folgende Eigenschaften:

- Das Feld zeigt tangential an die Feldlinien (→ Feldlinien kreuzen sich nicht)

- Die Feldliniendichte ist ein Maß für den Betrag des Feldes (an dieser Stelle)

- Der Richtungspfeil zeigt von ⊕ nach ⊖

■ Der Begriff des elektrostatischen Potentials

Um eine Ladung Q im Feld einer anderen Ladung zum Ort r_1 zum Ort r_2 zu bewegen müssen wir die Arbeit

$$W_{12} = -\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -Q \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

verrichten.

■ Beispiel: Potential im Coulomb-Feld

$$E = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_o}\,\frac{Q_1}{r^2}$$

Eingesetzt in das Potential:

$$U_{12} = \frac{W_{12}}{Q} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{Q}\cdot\frac{1}{4\,\pi\epsilon_o}\cdot\frac{Q_1}{r^2}\,d\vec{r}$$

$$U_{12} = \frac{Q_1}{4\,\pi\epsilon_o}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

Nun wählt man den Potentialnullpunkt, im Allgemeinen setzt man ihn in das Unendliche, so daß $r_1 = \infty$, und damit

$$U_{\infty 2} = \varphi\,(r_2) = \frac{Q_1}{4\,\pi\epsilon_o}\cdot\frac{1}{r_2}$$

Damit werden Spannungen immer zu Potentialdifferenzen:

$$u_{12} = \varphi\,(\vec{r_2}) - \varphi\,(\vec{r_1})$$

oder allgemein

Elektrostatisches Potential mit $\varphi(\infty) = 0$

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\,\vec{r}'$$

bzw.

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

Die Darstellung vonb φ erfolgt durch Äquipotentiallinien (-ebenen), sie stehen immer senkrecht auf den Feldlinien.

Im Falle eines Coulomb-Potentiales wären die Äquipotentiallinien konzentrische Kreise.

5.4.2 Die Verschiebungsdichte und die 1. Maxwell'sche Gleichung

Wir definieren:

Verschiebungsdichte, Flächenladungsdichte

$$D := \frac{Q}{A}$$

$$[D] = \frac{As}{m^2}$$

... und wir postulieren:

1. Maxwell'sche Gleichung

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

Hierbei ist Q die Ladung, die von der Fläche F eingeschlossen ist. Es gilt:

$$\vec{D} = \epsilon_o \cdot \vec{E}$$

und in vielen Materialien:

$$\vec{D} = \epsilon_o \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

■ Beispiel: Feld einer punktförmigen Ladung

Wie setzen an:

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

Wenn man hier als Fläche die Oberfläche einer Kugel wählt, steht die Normalkomponente der Verschiebungsdichte immer senktrecht auf der Oberfläche, das Integral wird zum Produkt mit der Oberfläche:

$$D_n \cdot 4\,\pi r^2 = Q$$

... un man erhält so die Feldstärke

$$E = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_o} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

■ Beispiel: Feld einer homogenen, geladenen Kugel

Außenraum r > R

hier verfährtman analog zur punktförmigen Ladung un erhält:

$$E_n = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_o}\,\frac{Q}{r^2}$$

Innenraum r < R

Hier bleibt die linke Seite identisch. Auf der rechten Seite steht die felderzeugende Ladung. Und diese ist nur ein Teil der Gesamtladung, und zwar

$$D_n\ 4\,\pi r^2 = Q\,\frac{\frac{4}{3}\,\pi\,r^3}{\frac{4}{3}\,\pi\,R^3} = Q_r$$

Nach Kürzen und auflösen nach E:

$$E_n = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_o}\,\frac{Q}{R^3}\,r$$

5.4.3 Der Kondensator und seine Kapazität

Zwei beliebig geformte, isolierte Leiteroberflächen wollen wir als Kondensator definieren.

Kapazität

$$C := \frac{Q}{U}$$

$$[C] = \frac{As}{V} = F \text{ (Farad)}$$

■ Beispiel: Kapaztät des Kugelkondensators

$$\mathbf{C = \frac{Q}{U}}$$

Die Spannung war ja gerade die Differenz der Potentiale φ (r) = $\frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\frac{1}{r}$, eingesetzt ergibt sich:

$$\mathbf{C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\cdot\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}}$$

nach kurzer Umformung

$$\mathbf{C = 4\pi\epsilon_o\,\frac{r_1\,r_2}{r_2 - r_1}}$$

■ Beispiel: Plattenkondensator

Wir nehmen an, im Plattenkondensator befinde sich ein homogenes E-Feld.

Es gilt C = $\frac{Q}{U}$:

Die Spannung ist hier U = $\int_0^d \vec{E}\,dx$ oder U=E·d, falls die Platten sehr groß sind. Also:

$$\mathbf{C = \frac{Q}{E\,d} = \frac{D\,A}{E\,d} = \epsilon_o\,\frac{A}{d}}$$

... und in vielen Materialien gilt:

$$C = \epsilon_o\,\epsilon_r\,\frac{A}{d}$$

■ Beispiel: Parallelschaltung von Kapazitäten

$$C_{ges} = \frac{Q_{ges}}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{C_1\,U + C_2\,U}{U}$$

$$C_{ges} = C_1 + C_2$$

■ Beispiel: Serienschaltung von Kapazitäten

Hier gilt:

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

und somit

$$U_{ges} = U_1 + U_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

■ Beispiel: Ableitung des Ohm'schen Gesetzes

Wir wollen nun einen Draht mit Querschnitt A betrachten. An ihm liege die Spannung U, und er habe die Länge d. Das E-Feld sei konstant.

Für die Kraft auf ein Elektron im Draht gilt:

$$\mathbf{F = -e\,\frac{U}{d}}$$

In einem Zeitintervall dt tritt eine bestimmte Ladung dQ aus dem Leiterquerschnitt hervor. Die Ladung entspricht hier offenbar dem Volumen, welches durch den Leiterquerschnitt fließt. Wir können schreiben:

$$\mathbf{\frac{dQ}{Q} = \frac{dV}{V}}$$

oder nach dQ aufgelöst und mit dV=Adx

$$\mathbf{dQ = \left(\frac{Q}{V}\right) A\,dx}$$

... wir definieren $\frac{Q}{V}$ als die Ladungsdichte ρ und intergrieren die Differentialgleichung:

$$I = \rho\ A\ v$$

Nach diesem ersten wichtigen Teilschritt betrachten wir die elektrostatische Kraft und setzen sie in die Newton'sche Bewegungsgleichung ein:

$$\mathbf{m\,\dot{v} = F = -e \cdot E}$$

Da die Beschleunigung $\dot{v}$ offensichtlich konstant ist muß daher gelten:

$$\mathbf{v\,(t) = -\frac{e}{m}\,E\,t}$$

also

$$\mathbf{I = I\,(t) = -\rho A\,\frac{e}{m}\,\frac{U}{d}\,t}$$

Dies steht aber im krassen Widerspruch zum Ohm'schen Gesetz (hier ging die Zeit nicht mit ein!).

Die Idee in diesem Fall ist, daß die Elektronen im Metall mit den Atomkernen stoßen, und dadurch gebremst werden. Rein phenomenologisch nehmen wir an es handle sich hierbei um Stokes'sche Reibung. Die Bewegungsgleichung wird zu:

$$\mathbf{m}\,\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} = -\mathbf{e}\cdot\mathbf{E} - \gamma_S\cdot\mathbf{v}$$

Im stationären Fall ergibt sich die Lösung der Diffentialgleichung zu:

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{eE}}{\gamma_S}$$

also

$$\mathbf{I} = \rho\mathbf{A}\left(-\frac{\mathbf{eE}}{\gamma_S}\right)$$

kurzes Sortieren ergibt:

$$\mathbf{I} = -\frac{\mathbf{e}\,\rho\,\mathbf{A}}{\gamma_S\,\mathbf{d}}\,\mathbf{U}$$

Damit definieren wir:

Ohm'scher Widerstand

$$R := -\frac{\gamma_S\cdot d}{e\cdot\rho\cdot A}$$

Man sieht der Ohm'scher Widerstand hängt explizit vom Reibungskoeffizienten ab, welcher eine materialspezifische Konstante darstellt.

5.4.4 Der Energieinhalt des elektrischen Feldes

Für die Energie W haben wir für eine Ladung Q gesagt:

$$W = U \cdot Q$$

(falls U konstant), bzw. allgemein:

$$W = \int U(Q)\, dQ$$

■ Beispiel: Energie eines Plattenkondensators der Kapazität C

$$W = \int \frac{Q}{C}\, dQ = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C}$$

bzw. mit Q = C U

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

■ Beispiel: Plattenkondensator allgemein

Ein Plattenkondensator habe die Plattenfläche A, deren Abstand d sei.

Es gilt:

$$W = \frac{1}{2} C U^2, \quad C = \epsilon_o \frac{A}{d}, \quad U = E d$$

Damit ergibt sich:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_o \frac{A}{d} E^2 d^2$$

Energieinhalt eines Plattenkondensators

$$W = \frac{1}{2} E \cdot D \cdot V$$

führt man noch die Energiedichte $w := \frac{W}{V}$ ein kann man ganz allgemein sagen:

Energieinhalt des elektrischen Feldes

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

5.4.5 Elektrische Dipole

Die Ladung +Q sei über den betragsfesten Vektor $\vec{r}$ mit der Ladung -Q verbunden. Es herrsche ein beliebiges E-Feld.

Da die attraktive und die repulsive Komponente der wirkenden Kraft entgegengesetzt gleich sind wirkt keine Kraft auf den Schwerpunkt des Systems, wohl aber ein Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Da F = Q·E kann man auch schreiben:

$$\vec{M} = (\vec{r} \cdot Q) \times \vec{E}$$

elektrisches Dipolmoment

$$\vec{p} = Q\,\vec{r}$$

und erhält

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Dieses Drehmoment bewirkt eine Ausrichtung des Dipols im elektrischen Feld.

5.5 Das zeitlich konstante magnetische Feld

5.5.1 Die 3. und 4. Maxwell'sche Gleichung

Wir postulieren:

Es gibt keine magnetischen Monopole!

Alle magnetischen Feldlinien sind geschlossen!

3. Maxwell'sche Gleichung

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

mit

Magnetische Flußdichte $\vec{B}$

$$[\mathrm{B}] = \frac{\mathrm{Vs}}{m^2} = \mathrm{T}\ (\mathrm{Tesla})$$

und wir postulieren

4. Maxwell'sche Gleichung

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \mathrm{I}$$

mit der

Magnetischen Feldstärke $\vec{H}$

$$[\mathrm{H}] = \frac{A}{m}$$

Wobei I der Strom ist, der durch die von $\oint$ dr berandete Fläsche stößt!

Es gilt folgende Relation:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$

und in vielen Materialien

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

dadurch sei definiert:

μ_0: Permeabilitätskonstante des Vakuums

$$\mu_0 = 4\,\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

■ Beispiel: Magnetfeld eines einzelnen geraden, stromdurchflossenen Leiters

Es gilt, daß das Magnetfeld um den "Strom" herumintegriert gerade den Strom ergibt.

Oder als 4. Maxwell'sche Gleichung:

$$\oint \vec{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{d}\,\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{I}$$

Geschickterweise wollen wir entlang eines konzentrischen Kreises integrieren. Da das Magnetfeld ohnehin nur eine Tangentialkomponente entlag unseres Integrationsweges besitzt, wird die Integration besonders einfach:

$$\mathbf{I} = \mathbf{H_t} \cdot \mathbf{2}\,\pi\,\mathbf{r}$$

oder

Magnetfeld eines Leiters

$$B_t = \mu_0 \frac{I}{2\,\pi\,r}$$

■ Beispiel: Magnetfeld einer langen Spule

... diese habe pro Spulenlänge L - N Wicklungen.

Hier verwenden wir wieder das 4. Maxwell'sche Gesetz:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = I$$

Der Integrationsweg ist hier knifflig. Man integriert hier über ein Quadrat, dessen eine Seite auf der Zylinderachse liegt, es habe außerdem die Länge L. Das heißt N Wicklungen durchstoßen die vom Integrationsweg berandete Fläche. Außerdem unterscheidet man beim Integrieren zwischen der axialen Seite des Quadrats und dem Rest. Wir erhalten:

$$\int_{\text{Achse}} \vec{H} \cdot d\vec{r} + \int_{\text{Rest}} \vec{H} \cdot d\vec{r} = N \cdot I$$

Das Außenfeld einer Zylinderspule ist jedoch extrem schwach und kann vernachlässigt werden. Weiterhin bewirkt die Symmetrie des Zylinders, daß das Magnetfeld auf der Achse nur eine Tangentialkomponente besitzt. Also:

$$H_t \cdot L = N \cdot I$$

Aufgelöst nach B

Magnetfeld einer langen Zylinderspule

$$B_t = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

Bemerkung: Die Vorlesung beschreibt noch eine Ringspule. Wie man sich aber leicht überlegen kann wird hier lediglich L gegen 2π r getauscht.

■ Das Gesetz von Biot-Savart

Zur Beschreibung von B-Feldern eignen sich die 3. und 4. Maxwell'sche Gleichung. Hier ist B bzw. H allerdings nur implizit enthalten und lediglich durch die Wahl geeigneter Symmetrien war es möglich B-Felder zu berechnen. Wir hätten jedoch gerne eine Vorschrift mit der man $\vec{B}$ explizit berechnen könnte. Also eine Formel der Form:

$$\vec{B} = \ldots .$$

... und in der Tat existiert sie. Es ist gerade das Gesetz von Biot-Savart, welches wir nun auf den folgenden Seiten herleiten wollen.

(i) Analogie zum elektrischen Feld

Hierbei geht man vom Coulomb-Gesetz aus, welches einzelne Punktladungen beschreibt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot Q_1 \frac{(\vec{r} - \vec{r_1})}{|\vec{r} - \vec{r_1}|^3}$$

über das Feld vieler Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_i Q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r_i})}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}$$

zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \int \rho(\vec{r}) \frac{\left(\vec{r} - \vec{r'}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^3} dV'$$

... wobei $\rho(\vec{r})$ hier die ortsabhängige Ladungsdichte darstellt.

(ii) (gerader,) geladener Draht

An Punkten außerhalb des geladenen Drahtes existiert ein durch die Ladungsdichte ρ erzeugtes (radiales) Feld $d\vec{E}$. Anhand der letzten Formel gelangt man zur folgenden Proportionalität:

$$d\vec{E} \sim \rho\left(\vec{r'}\right) \cdot \left(\vec{r} - \vec{r'}\right)$$

(iii) (gerader,) stromdurchflossener Draht

An Punkten außerhalb des stromdurchflossenen Drahtes existiert ein durch die Stromdicht j hervorgerufenes (tangentiales) Feld $d\vec{B}$. Das es sich hier um ein tangetiales Feld handelt ist das Skalarprodukt durch ein Kreuzprodukt zu ersetzen:

$$d\vec{B} \sim \vec{j}\left(\vec{r'}\right) \times \left(\vec{r} - \vec{r'}\right)$$

(iv) Die Analogie (jetzt) im magnetischen Feld

Wir ersetzen also die gefundenen Terme im Integral und erhalten:

$$\vec{B}\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r'}\right) \times \left(\vec{r} - \vec{r'}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^3} dV'$$

Natürlich wird ϵ_o durch μ_o ausgewechselt, es steht im Zähler da B ja die Flußdichte und nicht die Feldstärke des magnetischen Feldes darstellt.

(v) Spezialfall für Stromfäden

Falls der Strom nur in Fäden also Leitern geführt wird (wie es durchaus oft der Fall ist) kann man die noch etwas unanschauliche Gleichung etwas vereinfachen, da gilt:

$$\vec{j} \sim d\vec{r'}$$

$$\vec{j}\, dV' = I\, d\vec{r'}$$

Einsetzen in die Gleichung (und umdrehen des Kreuzproduktes) führt zum

Gesetz von Biot-Savart für Stromfäden

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_o}{4\pi} I \int \frac{\left(\vec{r} - \vec{r'}\right) \times d\vec{r'}}{\left(\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|\right)^3}$$

Diese Rechenvorschrift für ein B-Feld ist im Wesentlichen die Lösung der 3. und 4. Maxwell'schen Gleichung, also nur das, was wir ohnehin schon wissen anders hingeschrieben. Allerdings macht diese Form noch keinen besonders angenehmen Eindruck und die Frage, was denn mit diesem Ausdruck gewonnen wäre ist vollkommen berechtigt. Wir sind jetzt in der Lage B-Felder zu berechenen, vorausgesetzt wir wissen wie die Stromfäden liegen.

Es ist jedoch weniger schlimm, als es aussieht, wenn man sich an folgende Regeln zum Lösen eines Biot-Savart-Ausdruckes hält:

(i) Integrationsweg (richtig und sinnvoll) parametrisieren!

(ii) Substituiere $d\vec{r'}$ ($\frac{d\vec{r'}}{dt}$ bilden)

(iii) Mögliche Einschränkungen vornehmen, Subtraktion ausführen

(iv) Das Kreuzprodukt $(\vec{r}\text{-}\vec{r'}) \times \frac{d\vec{r'}}{dt}$ ausführen, Zwischenergebnis

(v) Mögliche Einschränkungen vornehmen.

(vi) $\int$dt ausführen

jetzt 2 Beispiele zur Rechnung:

■ Beispiel: Feld eines stromdurchflossenen, geraden Leiters

Der betrachtete Draht breite sich längs der Z-Achse aus und habe eine zu vernachlässigende Dicke. Es fliesse der Strom I.

(i) Wir parametrisieren sinnvollerweise längs der Z-Achse mit der variablen t

$$\vec{r'}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

damit ist der komplette Draht erfasst.

(ii) Substitution

$$d\vec{r'} = \frac{d\vec{r'}}{dt}\, dt = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

(iii) -entfällt-

(iii a) Subtraktion

$$\left(\vec{r} - \vec{r'}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - t \end{pmatrix}$$

(iv) Ausführen des Kreuzproduktes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z - t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iv a) Zwischenergebnis

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z-t)^2}\right)^3}\, dt$$

(v) -entfällt-

(vi) Integration

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_o I}{4\pi}\, \frac{2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man erhält also ein Wirbelfeld, so wie man es auch erwartet hätte rechte Handregel!).

■ Beispiel: Magnetfeld einer Leiterschleife

Die Leiterschleife habe den Radius R, durch den gebogenen Leiter fließe der Strom I. Das Zentrum der Leiterschleife liege im Koordinatenursprung, die Schleife selbst in der xy-Ebene.

(i) Parametrisierung ($\vec{r}$ durchlaufe einen Kreis mit Radius R)

$$\vec{r'} = R \begin{pmatrix} \text{Cos}[t] \\ \text{Sin}[t] \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Substitution

$$d\vec{r'} = \frac{d\vec{r'}}{dt}\, dt = R \begin{pmatrix} -\text{Sin}[t] \\ \text{Cos}[t] \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

(iii) Einschränken: Wir wollen nur das Magnetfeld der Z-Achse betrachten.

$$x = y = 0$$

(iii a) Subtraktion

$$\left(\vec{r} - \vec{r'}\right) = \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \end{pmatrix} - R \begin{pmatrix} \text{Cos}[t] \\ \text{Sin}[t] \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\,\text{Cos}[t] \\ -R\,\text{Sin}[t] \\ z \end{pmatrix}$$

(iv) Ausführen des Kreuzproduktes

$$\begin{pmatrix} -R\,\text{Cos}[t] \\ -R\,\text{Sin}[t] \\ z \end{pmatrix} \times R \begin{pmatrix} -\text{Sin}[t] \\ \text{Cos}[t] \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -zR\,\text{Cos}[t] \\ -zR\,\text{Sin}[t] \\ -R^2\,\text{Cos}^2[t] - R^2\,\text{Sin}^2[t] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -zR\,\text{Cos}[t] \\ -zR\,\text{Sin}[t] \\ -R^2 \end{pmatrix}$$

(iv a) Zwischenergebnis (Grenzen von 0 bis 2π → Der Kreis soll einmal durchlaufen werden.)

$$\vec{B}\,(\vec{r}) = -\frac{\mu_o\, I}{4\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \frac{\begin{pmatrix} -zR\,\text{Cos}[t] \\ -zR\,\text{Sin}[t] \\ -R^2 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{R^2 + z^2}\right)^3} dt$$

(v) Einschränken: Uns interessiert nur die Z-Komponente des Magnetfeldes.

$$B_x = B_y = 0$$

(vi) Integration (Hier einfach, da keine t-Abhängigkeit)

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_o I}{2} \frac{R^2}{\left(\sqrt{R^2 + z^2}\right)^3}$$

5.5.2 Das Lorentz'sche Kraftgesetz

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

5.5.2.1 Der Hall-Effekt

Entlang der Koordinatenachsen seien die Kanten eines dünnen Metallplättchens ausgerichtet. Stromführende kontakte seinen an den Stirnflächen der x-Achse angebracht. es fließe der Strom I_x. An den Stirnflächen der y-Achse kann eine Spannung abgegriffen werden. Ein Magnetfeld zeige in z-Richtung. Die Dicke (z-Richtung) sei d, die Breite (y-Richtung) sei b und die Länge (x-Richtung) sei L.

Betrachte nun die magnetische Komponente der Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Da sich Elektronen nur entlang der x-Achse bewegen und das B-Feld in z-Richtung zeigt gibt es offensichlich nur eine y-Komponente der Kraft (Kreuzprodukt!).

$$F_y = Q\,(v_z\,B_x - v_x\,B_z)$$

Der erste Term der Klammer ist null und entfällt. v_x kann man ersetzen durch $\frac{I_x}{\rho A}$.

$$F_y = -Q\,\frac{I_x}{\rho A}\,B_z$$

Die Ladungen werden also offensichtich an die Abgreifkontakte abgelenkt. Jetzt baut sich eine abstoßende Kraft auf, welche durch das so geschaffene E-Feld erzeugt wird. Wenn sich ein Gleichgewicht eingestellt hat gilt:

$$|F_{el}| = |F_{magn}|$$

$$\vec{F} = 0 = Q \cdot E_y - Q\,\frac{I_x}{\rho A}\,B_z$$

Das das Plättchen auch als Plattenkondensator interpretiert werden kann gilt: $E_y = \frac{U_H}{b}$

Aufgelöst nach U_H.

$$\mathbf{U_H = b \frac{I_x}{\rho A} B_z}$$

A ist aber b·d:

Hallspannung

$$U_H = \frac{B_z}{\rho \cdot d} I_x$$

Anmerkung: $\frac{B_z}{\rho \mathrm{d}}$ wird auch als Hallwiderstand bezeichnet.

Interessant: Über diese Beziehung kann ρ eines Materials direkt bestimmt werden.

5.5.2.2 Kraft zwischen zwei Leitern

Zwei unendlich lange dünne Drähte seien im Abstand r von einander aufgehängt. Es fließen die Ströme I_1 und I_2. Wir interessieren uns für die Kraft:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

mit $I = \rho \cdot A \cdot v$ erhalten wir für I_1:

$$F = Q \frac{I_1}{\rho \cdot A} B$$

und mit $\rho = \frac{Q}{V}$

$$F = \frac{V \cdot I_1}{A} B = I_1 \cdot L \cdot B$$

Betrachten wir das Magnetfeld des Drahtes 2:

$$B = \mu_o \frac{I_2}{2 \pi r}$$

... so folgt die Kraft auf Draht 1:

$$F = \mu_o L \frac{I_1 I_2}{2 \pi r}$$

■ Zahlenbeispiel: Definition der Stromstärke

r = 1m, $I_1 = I_2 = 1\,A$

$$\frac{F}{L} = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \frac{A^2}{2 \pi m} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{VsA}{m^2}$$

$$\frac{F}{L} = \frac{1}{5.000.000} \frac{N}{m}$$

... und das ist gerade die Defnition der Stromstärke im SI-Einheitensystem.

5.5.2.3 Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld

Geladene Teilchen bewegen sich in einem Magnetfeld auf Kreisbahnen. Damit diese stabil ist muß die Lorentzkraft gleich der Zentrifugalkraft sein, also:

$$Q \cdot v \cdot B = \frac{m v^2}{r}$$

bzw.

$$v = \frac{QB}{m} r$$

Ein Beispiel hierfür wäre das Zyklotron.

5.5.3 Übergänge in magnetischen Materialien

Hier soll die Frage beantwortet werden wie sich beispielsweise der B-Vektor verändert, wenn er aus dem Vakuum (μ_o) über eine Phasengrenze in ein Medium ($\mu_o \mu_r$) eintritt. Für den E-Vektor ist die Argumentation vollkommen gleich.

Normalkomponente

Wir denken uns an der Phasengrenze ein Probevolumen, vielleicht einen flachen Zylinder, dessen eine Seite ausserhalb, die andere innerhalb des Medium liegt. Es gilt das 3. Maxwell'sche Gesetz:

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Wählen wir die Höhe unendlich klein, können wir sie im Integral vernachlässigen und betrachten nur die Beiträge der Deckel (hier wird die Integration zur Multiplikation).

$$B_n A - B_n' A = 0$$

Da die Fläche A gleich ist gilt offensichtlich

$$B_n = B_n'$$

> Bezüglich einer Grenzfläche ist die Normalkomponente von $\vec{B}$ immer stetig!

Tangentialkomponente

Wir wählen hier ein sehr dünnes Rechteck (in seiner Mitte liege die Phasegrenze) entlang dessen Umfang wir integrieren. Hier gilt, da *keine* Ströme fließen:

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{r} = 0$$

Die Länge sei L und die Breite b unendlich klein, so daß sie entfallen kann:

$$H_t L - H_t' L = 0$$

Damit gilt:

$$H_t = H_t'$$

> Bezüglich einer Grenzfläche ist die Tangentialkomponente von $\vec{H}$ immer stetig!

Brechungsgesetz für den B-Vektor

Ein B-Vektor mit den Komponenten B_x und B_y trete aus dem Vakuum in ein Medium (seine Grenze liege entlang der x-Achse) mit μ_r ein.

Wir wissen:

$$B_y = B_y'$$

$$H_x = H_x' = \frac{1}{\mu_o \mu_r} B_x$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich nun das Brechungsgesetz:

$$\frac{\tan\alpha'}{\tan\alpha} = \mu_r$$

5.6 Zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder

5.6.1 Das Induktionsgesetz

2. Maxwell'sche Gleichung

$$\oint_{\text{Rand}(A)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Definieren wir die Induktionsspannung zu:

$$U_{ind} := \oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

und den magnetischen Fluß bezüglich der Fläche A als

$$\Phi := \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

erhalten wir das

Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi}$$

■ Beispiel:

Zwei parallele lange Leiter seien an einem Ende über ein Spannungsmeßgerät verbunden, ihr Abstand sei ℓ. Auf den Leitern bewege sich ein Draht mit konstanter Geschwindigkeit v. Durch die aufgespannte Fläche fließe das Magnetfeld B.

Es gilt:

$$U_{ind} = -\dot{\Phi} = -\frac{\partial}{\partial t} (B \cdot A)$$

Die Fläche A ist aber gerade $\ell \cdot x$.

$$U_{ind} = -\frac{\partial}{\partial t} (B \cdot \ell \cdot x) = B \cdot \ell \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial t} x\right)$$

der letzte Term ist aber gerade die Geschwindigkeit v, also

$$U_{ind} = -B \cdot \ell \cdot v$$

■ Beispiel: Transformator

Zwei Spulen seien über ein Eisenjoch verbunden, sie haben die Wicklungszahl N_1 und N_2. Wie hängen Ausgangs- und Endspannung mit den Wicklungen zusammen?

Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$U_1 = -N_1 \dot{\Phi}_o$$
$$U_2 = -N_2 \dot{\Phi}_o$$

Wobei Φ_0 der Fluß pro Wicklung ist.

Nach Division erhält man:

Transformatorgleichung

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Es versteht sich von selbst, daß diese Beziehung nur für Wechselströme gilt.

■ kein Beispiel: Hochspannungsleitung

Dieses Beispiel wird auf Bewährung ausgesetzt! ;-)

■ Der Begriff der Induktion

Wir betrachten eine lange Zylinderspule mit

$$B = \mu_o I \frac{N}{\ell}$$

Falls sich der Strom zeitlich verändert, wird sich auch das Magnetfeld zeitlich verändern, damit ist die Induktionsspannung ungleich null.

$$U_{ind} = -\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt}\left(A \ \mu_o I \frac{N}{\ell}\right) N$$

Das letzte N heißt, daß wir N mal um die Fläche A herumintegrieren, da sich die Spule ja auch N mal um ihre Querschnittsfläche windet.

Der einzige zeitlich veränderliche Beitrag in der Klammer ist I, daher folgt:

$$U_{ind} = -\left(\mu_o \frac{A N^2}{l}\right) \cdot \dot{I}$$

Wobei man den Vorfaktor definiert als

Induktivität L

$$[L] = \frac{Vs}{A} = H \text{ (Henry)}$$

mit dieser Abkürzung folgt die

Lenz'sche Regel

$$U_{ind} = -L\dot{I}$$

Die Induktionsspannung ist ihrer Ursache stets entgegengerichtet.

Die Induktivitäten verhalten sich bei Parallel- und Serienschaltung wie Ohm'sche Widerstände. Es gilt:

Serienschaltung von Induktivitäten

$$L_{ges} = L_1 + L_2$$

Parallelschaltung von Induktivitäten

$$\frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

■ Energieinhalt des magnetischen Feldes

Es gilt:

$$W = \int P\,dt = \int U \cdot I\,dt$$

Hier ist U die Induktionsspannung, man kann daher einsetzen:

$$W = \int -L \frac{dI}{dt} I\,dt = \int -L \cdot I\,dI$$

$$W_{mag} = -\frac{1}{2} L \cdot I^2$$

■ Beispiel einer Zylinderspule

$$L = \mu_o \frac{AN^2}{\ell}; \quad I = \ell \frac{H}{N}$$

eingesetzt in die Energie ergibt:

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \left(\mu_o \frac{AN^2}{\ell} \right) \left(\frac{\ell^2 H^2}{N^2} \right)$$

nach kürzen ergibt sich:

Energieinhalt einer Zylinderspule

$$W = \frac{1}{2} B \cdot H \cdot V$$

Auch hier ergibt sich (wie schon beim Plattenkondensator) durch Einführen der Energiedichte $w = \frac{W}{V}$ die allgemeine Beziehung:

Energiedichte des magnetischen Feldes

$$w = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

zusammem mit der Energiedichte des elektrischen Feldes erhält man

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$w_{e/m} = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

5.6.2 Elektrische Schaltkreise

Beim Zusammenschalten vom Ohm'schen Widerständen, Kapazitäten und Induktiovitäten gelten weiterhin die Kirchhoff'schen Regeln.

5.6.2.1 Ein- & Ausschaltvorgänge

In Stromkreisen gibt es folgende Spannungsabfällte für Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten.

$$U_R = R \cdot I$$

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

$$U_L = +L \cdot \dot{I}$$

Das Vorzeichen beim induktiven Spannungsabfall überrascht vielleicht im ersten Moment, aber hier ist die Spule Verbraucher und nicht Erzeuger.

■ Beispiel: Stromfluß durch eine Spule (Einschaltvorgang)

Eine Spule der Induktivität L und ein Widerstamd R seien in Serie geschaltet. Zum Zeitpunkt t=0 wird die Spannung U_o angelegt.

Hier gilt selbstverständlich die Maschenregel:

$$U(t) = R \cdot I + L \cdot \dot{I}$$

Lösung des Homogenen Problems $L \cdot \dot{I} + R \cdot I = 0$

Wir setzen an: $I(t) = I_o\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ und setzen ein:

$$-LI_o \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + I_o R e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

Wir erhalten die Zeitkonstante $\tau = \frac{L}{R}$

Partikuläre Lösung

Wir nehmen an I sei konstant. Die partikuläre Lösung lautet: $\tilde{I} = \frac{U_O}{R}$

Anfangswertproblem mit I (t=0) = 0

$$I(t) = I_o e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_o}{R}$$

mit der Anfangsbedingung:

$$I(t = 0) = 0 = I_o + \frac{U_o}{R}$$

$$I_o = -\frac{U_o}{R}$$

Allgemeine Lösung:

$$I(t) = \frac{U_o}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right);\ \tau = \frac{L}{R}$$

Das Verfahren zum Lösen solcher Probleme ist immer gleich. Aufstallen der Differentialgleichung, Lösen derselbigen, AWP, usw... und wird dahernicht näher erläutert.

5.6.2.2 Schwingkeise

Ein Widerstand R, ein Kondensator C und eine Spule L seien in Serie geschaltet. Es werde eine Kosinusförmige Spannung angelegt. Gesucht ist I(t).

Durch anwenden der Maschenregel erhält man:

$$U(t) = R \cdot I + \frac{Q}{C} + L \cdot \dot{I}$$

durch differenzieren erhält man:

$$\dot{U}(t) = L \cdot \ddot{I} + R \cdot \dot{I} + \frac{I}{C}$$

Diese Differntialgleichung wurde ausgiebig in der Mechanik diskutiert, hiermit wird auf diese Stelle verwiesen.

5.6.2.3 Wechselstromkreise und Wechselstromwiderstände

Bisher waren die Schaltkreise recht einfacher Natur und die Differentalgleichungen bekannt. Wie sieht es aus bei hochkomplexen Netzwerken aus Widerständen, Spulen und Kondensatoren? Hier ist das Lösen der Differentialgleichung "etwas" schwieriger, wenn nicht gar unmöglich. Allerdings kann man solche Probleme durchaus diskutieren. Hier haben die Elektrotechniker einen Trick, den wir hier auch benutzen wollen. Wir führen komplexe Scheinwiderstände ein.

Beginnen wir wieder bei den Spannungsabfällen:

$$U_R = I \cdot R$$

$$U_C = \frac{1}{C} \int I \, dt$$

$$U_L = L \cdot \frac{\partial}{\partial t} I$$

Die Spannung sei eine komplexe Schwingung der Form:

$$U(t) = U_o \, e^{i\omega t}$$

Wir gehen davon aus die Stromstärke verhalte sich daher wie:

$$I(t) = I_o \, e^{i\omega t}$$

Ohm'scher WIderstand

$$U_R = R \cdot I = R \, I_o \, e^{i\omega t} = R \cdot I$$

wir definieren:

$$U_R = Z_R \cdot I$$

Kapazität

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{i\omega C} I_o \, e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} I$$

wir definieren:

$$U_C = Z_C \cdot I$$

Induktivität

$$U_L = L \cdot \dot{I} = L \cdot i\omega \cdot I_o \, e^{i\omega t} = i\omega L \cdot I$$

wir definieren:

$$U_L = Z_L \cdot I$$

als Zusammenfassung erhalten wir:

Komplexe Scheinwiderstände

$$Z_R = R$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z_L = i\omega L$$

Bemerkung: Die Serien- und Parallelschaltung der Scheinwiderstände erfolgt völlig analog zu den Ohm'schen Widerständen.

Es ergibt sich dabei jeweil ein

Gesamtscheinwiderstand Z_{ges}

$$Z_{ges} = \underbrace{\mathrm{Re}(Z_{ges})}_{\text{Wirkwiderstand}} + \underbrace{\mathrm{Im}(Z_{ges})}_{\text{Blindwiderstand}}$$

Zerlegung des komplexen Scheinwiderstandes in Betrag und Phase

$$|Z_{ges}| = \sqrt{Im^2(Z) + Re^2(Z)} = \sqrt{ZZ^*}$$

$$\varphi = \mathrm{ArcTan}\,\frac{Im(Z)}{Re(Z)}$$

■ Beispiel: Schwingkreis

Ein Widerstand R, ein Kondensator C und eine Spule L seien in Serie geschaltet und werden durch eine Wechselspannungsquelle getrieben.

Der Gesamtwiderstand ist

$$Z_{ges} = Z_R + Z_C + Z_L$$

$$Z_{ges} = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

für kleines R wird der Gesamtwiderstand null, wenn der Imaginärteil null wird. Daraus folgt die Resonanzfrequenz:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

■ Beispiel: Sperrkreis

Ein Kondensator C und eine Spule L seien parallelgeschaltet. Für den Gesamtwiderstand gilt:

$$\frac{1}{Z_{ges}} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L}$$

$$Z_{ges} = \frac{1}{i\omega C - i\,\frac{1}{\omega L}}$$

Beobachtet man ein Glühbirnchen im Stromkreis, wenn man die Frequenz sukzessive erhöht leuchtet es schwächer, erlischt kurz völlig und wird wieder heller. Offensichtlich wird der Gesamtwiderstand sehr groß. Und zwar genau dann, wenn der Nenner null wird. Das tut er bei

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

wie man sich leicht überzeugen kann. Hier ist es so, daß keine mittlere Leistung am Birnchen abfällt, da Spannung und Strom um 90° phasenverschoben sind.

■ Leistungsabfall an einem Ohm'schen Widerstand

Wie betrachten folgende Spannung:

$$U = U_o \, \text{Cos}[\omega t]$$

damit ist der Strom

$$I = \frac{U}{Z_R} = \frac{U_o}{R} \, \text{Cos}[\omega t]$$

und die Leistung

$$P(t) = U(t) \cdot I(t)$$

$$P(t) = \frac{1}{R} U_o^2 \, \text{Cos}^2[\omega t]$$

Wir definieren

Mittlere Leistung

$$\langle P \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \, dt$$

sie ist hier

$$\langle P \rangle = \frac{1}{R} U_o^2 \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \text{Cos}^2[\omega t] \, dt}_{\frac{1}{2}}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{U_o^2}{R}$$

damit erhalten wir die Effektivspannung

$$U_{eff} = \frac{U_o}{\sqrt{2}}$$

damit wieder gilt

$$\langle P \rangle = \frac{U_{eff}^2}{R}$$

■ Beispiel: Leistungsabfall über einer Induktivität

$$U(t) = U_o \, \mathrm{Cos}[\omega t] = L \cdot \dot{I}$$

$$I(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\omega} U_o \, \mathrm{Sin}[\omega t]$$

Einsetzen in die Leistung:

$$P(t) = \frac{1}{L\omega} U_o^2 \, \mathrm{Cos}[\omega t] \, \mathrm{Sin}[\omega t]$$

Die mittlere Leistung ist dann:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{L\omega} U_o^2 \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{Cos}[\omega t] \, \mathrm{Sin}[\omega t] \, dt}_{=0}$$

$$\langle P \rangle = 0$$

Die mittlere Leistung ist gerade identisch mit null. Der Gesamtwiderstand enthaält nur einen Imaginärteil und Blindwiderstände führen zu*keiner* mittleren Leistung.

Die Argumentation für den mittleren Leistungsabfall über einer Kapazität verläuft analog und führt auch zu ⟨P⟩=0.

5.6.3 Der Verschiebungsstrom

Wir wissen bisher vom 4. Maxwell'schen Gesetz:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = I$$

Es hieß die Magnetfeldstärke entlang der Probefläche integriert ist gerade so groß wie der Strom, der die Probefläche durchstößt.

Stellen wir uns einen garden Draht vor der fließende Strom sei konstant. Wir betrachten einen Kreis mit Zentrum auf dem Draht. Hier ist die Situation eindeutig → Magnetfeld ist so stark wie durchstoßender Strom.

Selber Draht mit einer Nuance: Wir schalten einen Kondensator dazwischen (Probefläche nicht im Kondensator, sondern irgendwo davor). Hier kann der Strom natürlich nicht mehr konstant sein. Setzen wir hier Wechselstrom ein ist alles wieder in Ordnung → Magnetfeld ist so stark wie durchstoßender Strom, jetzt allerdings zeitabhängig.

Selber Draht, selber Kondensator, andere Probefläche. Der Rand der Probefläche soll immer noch der Kreis sein, aber die Fläche sei so ausgebeult (so wie eine Seifenblasenhaut, wenn wir gerade in dieses runde Teil reinblasen), daß die Fläche gerade im Kondensator den Draht passiert. Was ist jetzt? Die Fläche wird nicht mehr von Strom durchstoßen. Dennoch haben wir ein Magnetfeld entlang des Randes!?!

Da es ein Magnetfeld gibt **muß** ein Strom fließen!

Maxwell nannte diesen Strom den Verschiebungsstrom I_v. Er "fließt" zwischen den Kondensatorplatten, da sich hier offensichtlich die Ladung ändert. Wir können ihn so formulieren:

$$I_v = \frac{\partial}{\partial t} Q$$

nach der 1. Maxwell'schen Gleichung gilt für die Ladung $Q = \oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A}$, die Fläche war aber nicht gaanz geschlossen also schreiben wir es so:

$$I_v = \frac{\partial}{\partial t} \int_F \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

Jetzt können wir die Gleichung bereinigen:

4. Maxwell'sche Gleichung (Durchflutungsgesetz)

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \mathrm{I} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} \cdot d\,\vec{A}}_{\text{Verschiebungsstrom}}$$

Jetzt sieht man vielleicht schon die Konsequenz dieser Gleichung zusammen mit dem Induktionsgesetz:

Zeitveränderliche Ströme sind gleichbedeutend mit beschleunigten Ladungen.

→ beschleunigte Ladungen rufen zeitlich veränderte Magnetfelder hervor

→ zeitveränderliche Magnetfelder induzieren veränderliche elektrische Felder

→ zeitveränderliche elektrische Felder rufen veränderliche Magnetfelder hervor usw...

⇒ Es ergeben sich also ganz organisch die Elektromagnetischen Wellen, welche hier später diskutiert werden sollen.

Bis dahin woll wie uns merken:

Beschleunigte Ladungen sind die Quellen elektromagnetischer Wellen

5.7 Die Maxwell'schen Gleichungen in differentieller Form

1. $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$
2. $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$
3. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
4. $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{j}$

dazu gehört:

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu_o \vec{H}$$

bzw. in vielen Materialien

$$\vec{D} = \epsilon_o \epsilon_r \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H}$$

und diese Definitionen:

$$\operatorname{div} \vec{f} := \frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\operatorname{rot} \vec{f} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_z - \frac{\partial}{\partial z} f_y \\ \frac{\partial}{\partial z} f_x - \frac{\partial}{\partial x} f_z \\ \frac{\partial}{\partial x} f_y - \frac{\partial}{\partial y} f_x \end{pmatrix}$$

Bemerkung: In der Vorlesung kommen an dieser Stelle zum einen die Herleitungen der Integralsätze von Gauß und von Stokes und zum anderen deren Anwendung um die Maxwell'schen Gleichungen von der differentiellen Form in ihre Integralform zu überführen. Da sich hierbei um pure Mathematik handelt über springe ich diese Stellen und komme gleich zur

■ Kontinuitätsgleichung der Elektrodynamik

Wir starten von der 1. und 4. Maxwell'schen Gleichung:

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}} = \rho$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\,\vec{\mathbf{D}}$$

Wir leiten die 1. Zeile nah der Zeit ab und wenden auf die 2. Zeile die Divergenz an:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\,\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\,\rho$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\,\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}}$$

Addiert man beide Gleichungen erhält man:

Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\,\rho = 0$$

Wir wollen die Gleichung noch etwas weiter umformen. Wir integrieren über ein Probevolumen: $\int_V \mathrm{dV}$

$$\int_{\mathbf{V}} \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{j}}\,\mathbf{dV} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \underbrace{\int_{\mathbf{V}} \rho\,\mathbf{dV}}_{\dot{\mathbf{Q}}} = \mathbf{0}$$

Der zweite Beitrag ergibt $\dot{Q}$, der erste wird mittels des Integralsatzes von Gauß umgewandelt zu:

$$\oint_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{d}\,\vec{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$$

Der erste Beitrag ist jetzt aber gerade der Strom wir können daher schreiben:

$$I = -\dot{Q}$$

Das Minuszeichen ist hier kein Widerspruch, da es sich bei den Maxwell'schen Gleichungen um eine andere Definition des Stromes handelt (technische Stromrichtung).

5.8 Elektromagnetische Wellen

Wir nehmen an, daß elektromagnetische Wellen einer Wellengleichung folgen. Zur Herleitung beginnen wir aus der 2. und 4. Maxwell-Gleichung:

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

Wir multiplizieren die erste Zeile mit $\mu_o$und leiten nach der Zeit ab. In der Zweiten wenden wir Rotation an.

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\vec{B} = \mu_o \frac{\partial}{\partial t}\vec{j} + \mu_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D}$$

$$\text{rot rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

Wenn wir die linke Seite der zweiten Zeile ausschreiben:

$$\text{grad}\left(\text{div}\,\vec{E}\right) - \text{div}\left(\text{grad}\,\vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

Da wir uns im Vakuum befinden ist hier der erste Term null (1. Maxwell'sche Gleichung). Die Divergenz eines Gradienten ist aber gerade der Laplace-Operator.

$$-\Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

Jetzt werden beide Gleichungen addiert:

$$-\Delta\vec{E} + \mu_o \frac{\partial}{\partial t}\vec{j} + \mu_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D} = 0$$

Wenn wir D durch E ausdrücken erhalten wir:

Wellengleichung des $\vec{E}$-Feldes im Vakuum

$$\Delta\vec{E} - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \mu_o \frac{\partial}{\partial t}\vec{j}$$

Man sieht es direkt an dieser Gleichung (rechte Seite), die Quellen elektromagnetischer Strahlung sind zeitveränderliche Ströme.

Außerdem steht hier implizit die Beziehung $\mu_o \epsilon_o = \frac{1}{c_o^2}$. Aufgelöst nach c_o:

Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$c_o = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} = 2,99 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s}$$

Beziehungsweise

Mediumlichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \mu_r \epsilon_o \epsilon_r}}$$

■ Beispiel: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E_o} \cdot \mathrm{Cos}[\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t]; \dot{\vec{j}} = 0$

Durch Einsetzen in die Wellengleichnung...

$$-E_o \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \mathrm{Cos}\left[\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t\right] - \left(-\frac{\vec{E_o}}{c_o^2} \omega^2 \mathrm{Cos}\left[\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t\right]\right) = 0$$

... und kürzen erhalten wir:

Dispersionsrelation im Vakuum

$$\frac{\omega^2}{\vec{k}^2} = c_o^2$$

Bemerkung: Es gilt also $\frac{\omega}{k} = c_o$ im Vakuum, bzw. $\frac{\omega}{k} = c$ für ein Medium. Hieraus leiten sich natürlich auch $f \cdot \lambda = c_o$ (im Vakuum) und $f \cdot \lambda = c$ (im Medium) ab.

■ Richtung von $\vec{E}$ in Bezug auf die Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$?

Wir beginnen mit der 1. Maxwell'schen Gleichung. In diesem Fall ist $\rho = 0$, also

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{D}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} = 0$$

Wenn wir unser Beispiel von eben einsetzen erhalten wir:

$$-(\mathbf{E_{xo}}\,\mathbf{k_x} + \mathbf{E_{yo}}\,\mathbf{k_y} + \mathbf{E_{zo}}\,\mathbf{k_z})\ \mathbf{Sin}\left[\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}} \pm \omega\mathbf{t}\right] = 0$$

Die Klammer ist aber ein ausgeschriebenes Skalarprodukt:

$$-\left(\overrightarrow{\mathbf{E_o}}\cdot\vec{\mathbf{k}}\right)\ \mathbf{Sin}\left[\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}} \pm \omega\mathbf{t}\right] = 0$$

Da der Sinus (im Allgemeinen) nicht null wird muß das Skalarprodukt null sein. Dies ist es nur, wenn $\overrightarrow{E_o}$ und $\vec{k}$aufeinander senkrecht stehen.

■ Richtung von $\vec{B}$?

Wir nehmen an $\vec{B}$ verhalte sich wie

$$\vec{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{B_o}}\cdot\mathbf{Cos}\left[\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}} \pm \omega\mathbf{t}\right] = 0$$

... und bemühen das Induktionsgesetz:

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{t}}\,\vec{\mathbf{B}}$$

Setzen wir $\vec{E}$ aus unserem obigen Beispiel ein erhalten wir im Ausdruck mit der Rotation immer einen Sinus-Beitrag, den wir ausklammern:

$$-\begin{pmatrix}\mathbf{E_{zo}}\,\mathbf{k_y} - \mathbf{E_{yo}}\,\mathbf{k_z}\\ \mathbf{E_{xo}}\,\mathbf{k_z} - \mathbf{E_{zo}}\,\mathbf{k_x}\\ \mathbf{E_{yo}}\,\mathbf{k_x} - \mathbf{E_{xo}}\,\mathbf{k_y}\end{pmatrix}\ \mathbf{Sin}\left[\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}} \pm \omega\mathbf{t}\right] = \pm\omega\cdot\mathbf{B_o}\,\mathbf{Sin}\left[\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}} \pm \omega\mathbf{t}\right]$$

Der Vektor auf der linken Seite ist aber gerade ein Kreuzprodukt aus $\vec{k}$ und $\overrightarrow{E_o}$.

$$\overrightarrow{B_o} = \mp\,\frac{1}{\omega}\,\vec{k}\times\overrightarrow{E_o}$$

Also stehen $\overrightarrow{B_o}$, $\overrightarrow{E_o}$ und $\vec{k}$ stehts aufeinander senkrecht.

Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen!

aber nicht nur die Richtungen, sondern auch die Beträge von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ stehen in einem festen Zusammenhang.

Es gilt:

$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c_o}} \mathbf{E}$$

und damit

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{1}}{\mu_o \mathbf{c_o}} \mathbf{E}$$

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} = \mu_o \mathbf{c_o} = \mu_o \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}}$$

Wellenwiderstand des Vakuums

$$Z_o := \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 376\,\Omega$$

5.8.1 Energieflüsse und der Poynting-Vektor

Folgende Situation:

Eine Sendestation emmitiert Elektromagnetische Strahlung in einer Richtung $\vec{k}$.

Die Frage: Wie ändert sich die Energie mit der Zeit?

Ausgehend von der Energiedichte $w_{e/m} = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right)$ wollen wir die erste zeitliche Ableitung ermitteln. Dazu schreiben wir $\vec{D}$ und $\vec{B}$ aus:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{e/m} \overset{\text{Vakuum}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2}\left(\epsilon_o \vec{E}\cdot\vec{E} + \mu_o \vec{H}\cdot\vec{H}\right)$$

Durch differenzieren erhalten wir (mit $\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}x^2 = x\,\dot{x}$):

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{e/m} = \epsilon_o \vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \mu_o \vec{H}\cdot\dot{\vec{H}} = \vec{E}\cdot\dot{\vec{D}} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}}$$

Wenn wir jetzt ausnutzen, daß rot $\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$ und rot $\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{e/m} = \vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{j}\right) - \vec{H}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)$$

oder etwas anders geschrieben:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{e/m} = \underline{\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) - \vec{H}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)} - \vec{j}\cdot\vec{E}$$

Aus der Vektoralgebra weiß man, daß der "geklammerte" Term gerade die negative Divergenz von $\vec{E}\times\vec{H}$ ist.

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{e/m} = -\text{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) - \vec{j}\cdot\vec{E}$$

Wir definieren:

Poynting-Vektor $\vec{S}$

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$$

$$[S] = \frac{W}{m^2}$$

und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{e/m} = -\operatorname{div} \vec{S} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Wobei -div $\vec{S}$ den Zu- oder Abluß von Energie und -$\vec{j}\cdot\vec{E}$ die Umwandlung in Joule'sche Wärme darstellt.

Mit dem Gauß'schen Integralsatz erhält man:

$$\dot{W}_{e/m} = -\underbrace{\oint \vec{S} \cdot d\vec{A}}_{\text{Energiefluß durch die Oberfläche}} - \int \vec{j} \cdot \vec{E}\, \mathrm{dV}$$

■ Beispiel: Ebene Welle

Hier standen $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{k}$ aufeinander senkrecht. Wir setzen in die Definition die oben gefundene Beziehung ein $\overrightarrow{B_o} = \mp \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \overrightarrow{E_o}$: (hier +)

$$\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \left(\frac{1}{\mu_o\, \omega} \vec{k} \times \vec{E} \right)$$

Diese unangenehme doppelte Kreuzprodukt müssen wir nun nach der baccab-Regel entwickeln:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_o\, \omega} \vec{k} \cdot E^2 - \underbrace{\vec{E} \left(\frac{1}{\mu_o\, \omega} \vec{E} \cdot \vec{k} \right)}_{0,\ \text{da}\ \vec{E} \perp \vec{k}}$$

Das heißt $\vec{S}$ und $\vec{k}$ sind parallel. Der Energiefluß einer elektromagnetischen Welle findet entlang der Ausbreitungsrichtung statt. Nichts anderes hätten wir erwartet.

Wenn wir den Ausdruck noch etwas massieren und k und $\frac{1}{\omega}$ zusammenfassen erhalten wir im Vakuum $\frac{1}{c_o}$ und das ist mit $\frac{1}{\mu_o}$ gleich $\frac{1}{Z_o}$. Damit erhält man:

Intensität einer Welle

$$|\vec{S}| = \frac{1}{Z_o} \cdot E^2$$

■ Beispiel: Einschaltvorgang einer Spule

Ein Draht sei auf einen Zylinder aufgewickelt. Wird der Strom eingeschaltet wird in der Spule ein Magnetfeld erzeugt. Dieses veränderliche Magnetfeld induziert ein elektrisches Feld außerhalb der Spule. Erinnern wir uns an die Definition des Poyting-Vektors, so treffen sich B- und E-Feld nur auf dem Zylindermantel und nur dort ist der Poyting-Vektor definiert.

Er zeigt hier nach innen.

Das H-Feld ist bekanntlich: $H = \frac{NI}{\ell}$

Was ist das E-Feld? Wir befragen das Induktionsgesetz:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Wir integrieren entlang des Zylinderradius:

$$2\pi \cdot R \cdot E = -\mu_o \frac{N}{\ell} \dot{I} \cdot \pi R^2$$

$$E = \frac{1}{2} \mu_o \frac{N}{\ell} \dot{I} R$$

Damit ergibt sich (da $\vec{H}$ und $\vec{E}$ senkrecht aufeinander stehen):

$$\left|\vec{S}\right| = \left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{H}\right| = \left(\frac{1}{2} \mu_o \frac{N}{\ell} \dot{I} R\right) \left(\frac{N}{\ell} J\right)$$

Das ist der Energiefluß an einem Punkt. Betrachten wir den Fluß durch die gesamte Oberfläche.

$$\underbrace{S \cdot 2\pi \cdot R \cdot \ell}_{S_{ges}} = \underbrace{\mu_o \frac{N^2}{\ell} \pi R^2}_{L} \dot{I} I$$

$$S_{ges} = L \dot{I} I$$

wenn wir die zeitliche Ableitung herausziehen ergibt sich:

$$S_{ges} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L \cdot I^2\right)$$

Der Beitrag in der Klammer ist gerade die Energie der Spule. Das Ergebnis ist nicht gerade überraschend, da eine von null verschiedene zeitliche Änderung der Energie eines System zwangsläufig zu Energieflüssen führen muß.

5.8.2 Der Skin-Effekt und Hohlleiter

Wir wollen uns die Frage stellen: Wie fließt der Strom im Leiter?

Dazu starten wir von der Wellengleichung:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \mu_o \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}$$

Das ist natürlich etwas unangenehm, da wir j beschreiben wollen, also die Stromdichte. Aber wir bearbeiten E jetzt nach dem Ohm'schen Gesetz (hier: Plattenkondensator):

$$E = \frac{U}{d} = \frac{IR}{d} = \frac{I}{A} \frac{AR}{d}$$

Wir definieren:

Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{d}{AR}; [\sigma] = \frac{1}{\Omega m}$$

und erhalten mit ($j = \frac{I}{A}$):

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Dies setzen wir in die Wellengleichung ein und da wir uns in einem homogenen Leiter befinden ist σ konstant, daher:

$$\frac{1}{\sigma} \Delta \vec{j} - \frac{1}{\sigma \cdot c_o^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{j} = \mu_o \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}$$

... und damit kann man schon viel besser umgehen. Wir betrachten der Einfachheit halber ein eindimensionales System:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} j - \frac{1}{\sigma \cdot c_o^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} j = \mu_o \frac{\partial}{\partial t} j$$

Die Richtung von $\vec{j}$ muß senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ sein, da gilt:

$$\text{div}\, \vec{D} = \rho = 0 = \text{div}\, \vec{E} = \text{div}\, \vec{j} = 0$$

Wir nehmen eine nach rechts laufende Welle an:

$$j = j_o \cdot e^{i\,(kx - \omega t)}$$

Einsetzen in die Wellengleichung liefert:

$$-\frac{1}{\sigma}\,k^2\,j_o\cdot e^{i\,(kx-\omega t)}+\frac{1}{\sigma}\,\omega^2\,\frac{1}{c_o{}^2}\,j_o\cdot e^{i\,(kx-\omega t)}=-i\omega\,\mu_o\,j_o\cdot e^{i\,(kx-\omega t)}$$

nach kürzen:

$$-k^2+\omega^2\,\frac{1}{c_o{}^2}=-i\omega\,\mu_o\,\sigma$$

Wir wollen annehmen, daß gilt: $\frac{\omega^2}{\sigma\cdot c_o{}^2}\ll\mu_o\,\omega$, bzw $\omega\ll\frac{\sigma}{\epsilon_o}$. Wir erhalten so ein Zwischenergebnis:

$$k^2=i\mu_o\,\sigma\cdot\omega$$

k ist offensichtlich komplex. Das ist ein Hinweis auf eine gedämpfte Welle.

$$k=\pm\sqrt{i}\,\sqrt{\mu_o\,\sigma\,\omega}$$

$\sqrt{i}$ ist aber gerade $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$ (Euler'scher Satz).

$$k=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sqrt{\mu_o\,\sigma\,\omega}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sqrt{\mu_o\,\sigma\,\omega}$$

Eingesetzt in unseren Ansatz erhält man:

$$j=j_o\cdot e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\mu_o\,\sigma\,\omega}\,x\right)}\cdot e^{i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_o\,\sigma\,\omega}\,x-\omega t\right)}$$

Mit zwei Abkürzungen erhält man:

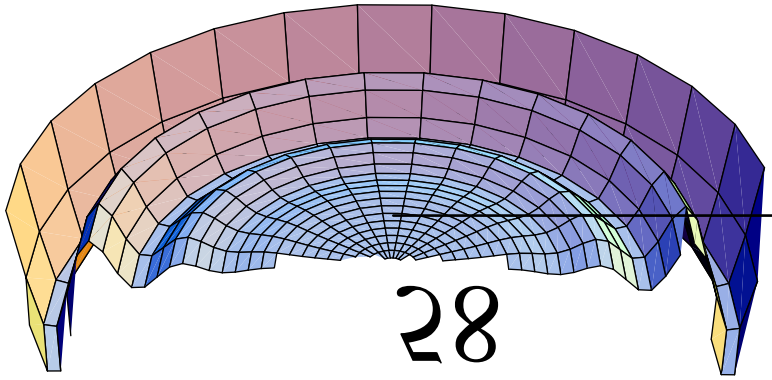
Stromdichte beim Skin-Effekt

$$j=j_o\,e^{-\frac{x}{\ell}}\cdot e^{i(k_r\,x-\omega t)}$$

Eindringtiefe: $\ell=\sqrt{\frac{2}{\mu_o\,\omega\sigma}}$

Realteil des Wellenvektors: $k_r=\sqrt{\frac{\mu_o\,\sigma\,\omega}{2}}$

Hierbei bewirkt der imaginäre Exponent eine gewöhnliche Welle und der reelle Exponent einen exponentiellen Abfall. Trägt man j auf einen Schnitt durch den zylindrischen Draht auf erhält als Standbild folgende Schüssel:



■ Hohlleiter

Idee: Die Wellen werden im Innenraum eines hohlen Körpers geführt.

Verwendet man beispielsweise einen Hohlzylinder aus Metall, ist die Leitfähigkeit der Wandung im Vergleich zum Innenraum sehr groß. Es gilt:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Damit j endlich bleibt muß daher E an den Wänden verschwindend gering sein. (Randbedingung)

Wir betrachten einen rechteckigen Hohlleiter mit den Maßen ℓ_x und ℓ_y.

Die Wellengleichung (hier: KEINE Quellen) ...

$$\Delta \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathbf{E}} = 0$$

... wird durch folgenden Ansatz gelöst:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{E_o}\, \mathrm{Sin}[k_x x]\, \mathrm{Sin}[k_y y]\, \mathrm{Sin}[k_z z - \omega t]$$

Hier sind stehende Wellen in x- und y-Richtung beschrieben, sowie eine propagierende Komponente in z-Richtung.

Nach Einsetzen erhält man:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_o^2} = 0$$

$$\left(\left| \vec{k} \right| \right)^2 - \frac{\omega^2}{c_o^2} = 0$$

Aufgrund der Randbedingung ($\vec{E}$=0) muß gelten:

$$\mathrm{Sin}[k_x \ell_x] = 0$$
$$\mathrm{Sin}[k_y \ell_y] = 0$$

Die Argumente müssen daher Vielfache von π sein:

$$k_x = n_x \frac{\pi}{\ell_x}$$
$$k_y = n_y \frac{\pi}{\ell_y};\ n_x, n_y \in \mathbb{N}$$

Setzt man dies in dies obige Beziehung ein und löst nach k_z auf erhält man:

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_o^2} - n_x^2 \frac{\pi^2}{\ell_x^2} - n_y^2 \frac{\pi^2}{\ell_y^2}}$$

anders geschrieben ergibt sich:

Phasengeschwindigkeit in z-Ausbreitung

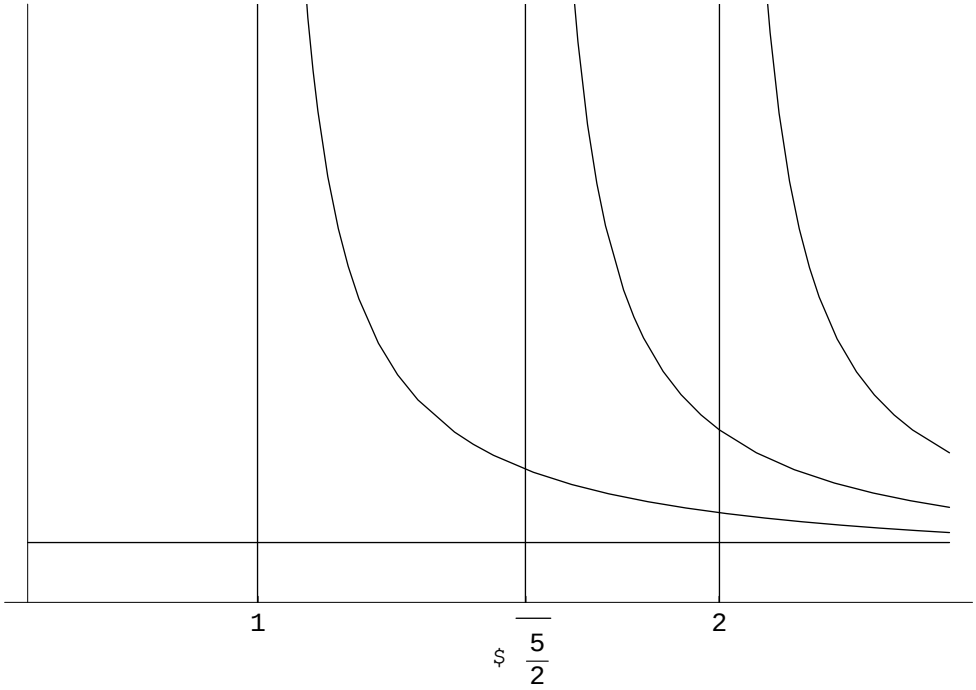
$$\frac{\omega}{k_z} = \frac{c_o}{\sqrt{1 - \frac{c_o^2 \pi^2}{\omega^2}\left(\frac{n_x^2}{\ell_x^2} + \frac{n_y^2}{\ell_y^2}\right)}}$$

Bemerkungen:

1.) Es gibt eine Grenzfrequenz $\omega_{gr.}$ unterhalb derer der Radikant negativ wird. Ab diesem Punkt sind nur noch gedämpfte Wellen möglich: $\omega_{gr.} = c_o \pi \sqrt{\frac{1}{\ell_x^2} + \frac{1}{\ell_y^2}}$.

2.) Für $\omega > \omega_{gr.}$ ist die Phasengeschwindigkeit: $\frac{\omega}{k_z} > c_o$

$\frac{\omega}{k_z}$ gegen $\frac{\omega}{\omega_{gr.}}$ aufgetragen (für den Fall $\ell_x = \ell_y$) ergibt:



1. Bereich 0 - 1:

Hier ist der Radikant für alle n_x und n_y negativ. Hier ist keine Wellenausbreitung möglich. Die Wellen werden hier gedämpft.

2. Bereich 1-$\sqrt{\frac{5}{2}}$:

In diesem Bereich schwingt gerade die Grundmode mit $n_x = n_y = 1$.

3. Bereich $\sqrt{\frac{5}{2}}$ – 2:

Hier schingt sowohl die Grundmode, als auch eine Mode mit $n_x = 2$ und $n_y = 1$bzw. umgekehrt.

usw...

Bemerkung: An dieser Stelle der Vorlesung folgt ein Exkurs über Optische Glasfasern und ein kurzer Abriß über die Lösung der auftretenden Wellengleichung. Einzige (mir) sinnvolle (erscheinende) Information ist:

> Mediumlichtgeschwindigkeit
>
> $c = \frac{c_o}{n}$
>
> Brechzahl: $n = \sqrt{\epsilon_r}$

... über die Lösung dieses Systems von (Bessel-?)Gleichungen vgl. "Fundamentals of fibre optics", Buck, John Wiley & Sons.

5.9 Elektrodynamik der Kontinua

Bisher hatten wir:

im Vakuum:

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H}$$
$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E}$$

in "vielen" Materialien:

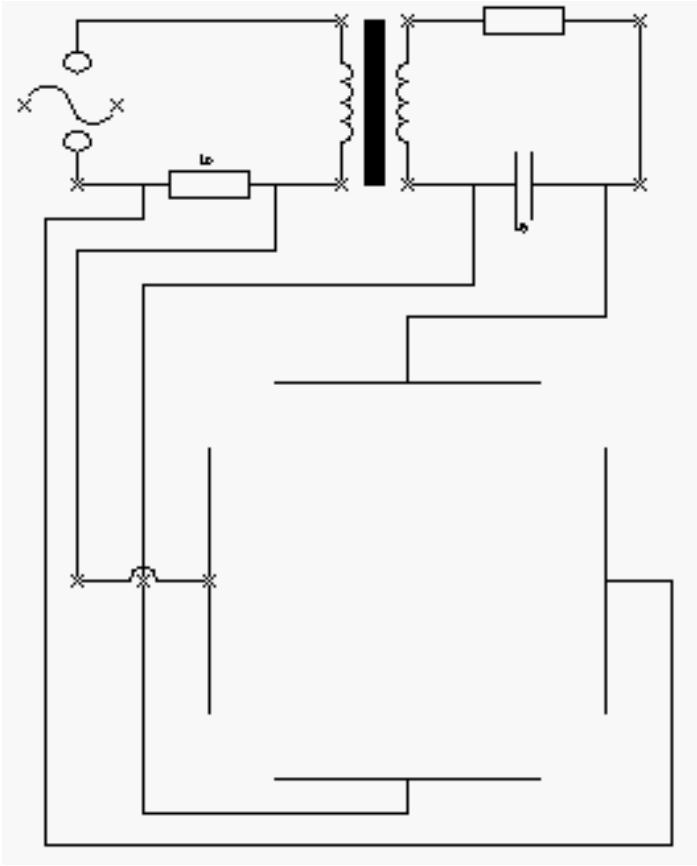
$$\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H}$$
$$\vec{D} = \epsilon_o \epsilon_r \vec{E}$$

Im allgemeinen reichte das aus, aber was sind nun gerade die "anderen" Materialien, solche, bei denen diese Beziehungen eben nicht gelten? Was ist denn dieses μ_r und dieses ϵ_r? Tatsächlich beschäftigt sich fast die ganze Festkörperphysik nur mit dieser Frage.

■ Zusammenhang: B und H

Wir wollen uns fragen, wie kann man den Zusammenhang zwischen $\vec{B}$ und $\vec{H}$ in Materialen messen? Hier konkret von Eisen.

Im Experiment wird H geändert und B aufgetragen, dies geschieht am Oszillographen (vgl. Schaltplan). Wir verändern also U_x, dies ist proportional zu I dies wiederum zu H.



B ist kniffliger. U_y ist proportional zu $\int$Idt das proportional zu $\int U_{\text{ind}}$dt und dies zu $\int \dot{B}$dt. Wir greifen U_y aber über einem Kondensator ab, dies hat einen integrierenden Effekt und wir erhalten B.

Es ergibt sich offenbar nicht ein linearer Zusammenhang wie wir das für ein μ_r erwartet hätten (dies ist nur im Vakuum der Fall, für "viele" Materialen eine gute Näherung). Der Zusammenhang ist tatsächlich hysteretisch und ist in der Nähe von H=0 nicht eindeutig. Den Punkt bei H=0 nennt man Remanenz und den Punkt bei B=0 nennt man Koerzitivfeldstärke.

Was ist der Grund für ein solches Verhalten? Man könnte sich nun fragen "Sind es vielleicht interne Ströme im Material?". Lange Rede kurzer Sinn: So ist es tatsächlich. Es handelt sich um Kreisströme auf atomarer oder molekularer Ebene.

Nehmen wir nun an im Material existieren kleine Leiterschleifen und Kreisströme fließen wirr ohne Vorzugsrichtung hin und her. Liegt nun ein externes Magnetfeld an werden die "starren" Leiterschleifen ins Feld ausgerichtet.

Auf einen Leiter der Länge ℓ wirkt folgende Kraft:

$$\mathbf{F} = \ell \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{B}$$

multipliziert mit der Breite b ergibt sich das Drehmoment M:

$$\mathbf{M} = b\,(\ell \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{B}) = (b \cdot \ell \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{B}$$

b mal ℓ ist die Fläche A und A·I wird definiert als das magnetische Dipolmoment, so kann man vektoriell schreiben:

Magnetisches Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{m_m} \times \vec{B}$$

Offensichtlich unterscheidet man zwischen internen und externen Strömen, aber die Maxwell'schen Gleichungen nicht. Hier das formale Vorgehen um wieder Ordnung herzustellen:

Maxwell Gleichungen im Vakuum (hier: ohne D oder H)

$$\mathbf{div}\ \epsilon_o \vec{\mathbf{E}} = \rho$$

$$\mathbf{rot}\ \vec{\mathbf{E}} = -\dot{\vec{\mathbf{B}}}$$

$$\mathbf{div}\ \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_o}\ \mathbf{rot}\ \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{j}} + \epsilon_o \dot{\vec{\mathbf{E}}}$$

Es gilt aber, wenn $\vec{j}$ der gesamte Strom ist:

$$\vec{\mathbf{j}} = \overrightarrow{\mathbf{j}_{\mathbf{ext}}} + \overrightarrow{\mathbf{j}_{\mathbf{int}}}$$

dasselbe gilt auch für die Ladungsdichte:

$$\rho = \rho_{\mathbf{ext}} + \rho_{\mathbf{int}}$$

Betrachten wir die 4. Maxwell'sch Gleichung im stationären Fall ($\dot{\vec{E}}$=0):

Wir ziehen $\overrightarrow{j_{int}}$ ab:

$$\frac{1}{\mu_o}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} - \overrightarrow{j_{int}} = \overrightarrow{j_{ext}}$$

Ziel ist es $\overrightarrow{j_{int}}$ verschwinden zu lassen. Daher definieren wir: rot $\vec{M}$ = $\overrightarrow{j_{int}}$. M ist die Magnetisierung. Wir erhalten:

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu_o}\vec{B} - \vec{M}\right) = \overrightarrow{j_{ext}}$$

Den Beitrag in der Klammer definieren wir nun als $\vec{H}$:

Die Wirbel von $\vec{H}$ (Magnetfeld) sind die äußeren Ströme!

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \overrightarrow{j_{ext}}$$

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$$

Die Wirbel von $\vec{M}$ (Magnetisierung) sind die internen Ströme!

$$\mathrm{rot}\,\vec{M} = \overrightarrow{j_{int}}$$

$$[\mathrm{M}] = [\mathrm{H}] = \frac{A}{m} = \frac{A\,m^2}{m^3} = \frac{[m_m]}{[V]} = \frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$$

Bemerkung: Der Definitionen der Magnetstärke und der Magnetisierung sind es viele, fast so viele wie es Lehrbücher gibt. Herr Wegener legte in seiner Vorlesung höchsten Wert darauf, daß die hier beschriebene die einzig richtige sei!

Häufig definiert man noch (hier phenomenologisch):

Magnetische Suszeptibilität χ_m

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$[\chi_m] = 1$$

Einsetzen in $\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$:

$$\vec{B} = \mu_o \left(\vec{H} + \chi_m \vec{H}\right)$$

$$\vec{B} = \mu_o (1 + \chi_m) \vec{H}$$

und mit

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

erhält man die Beziehung, welche für "viele" Materialien gilt:

$$\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H}$$

■ Beispiel: Permanentmagnet

Wie sehen die Feldlinien eines Permanentmagneten aus? Zunächst zum B-Feld. Wie wir bereits wissen ist die Normalkomponente von B stetig beim Eintritt in ein Medium, so auch hier. Die B-Feldlinien sind geschlossene Feldlinien. Beim H-Feld ist die Normalkomponente allerdings unstetig und zeigt im Megneten in umgekehrte Richtung.

■ Zusammenhang: D und E

Um den Zusammenhang zwsichen D und E am Oszillographen darzustellen verwenden wir einen TGS-Kristall als Dielektrikum im Kondensator C_2.

E ist direkt proportional zur angelegten Wechselspannung U(t). Für D ist es wieder etwas kniffliger.

Wir nehmen an $C_1 >> C_2$, es folgt: $|Z_{C_1}| << |Z_{C_2}|$, weil $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$.

Wir greifen $U_y$aber direkt über C_1ab, hier gilt:

$$U_y = U_{C_1} = \frac{Z_{C_1}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}} \cdot U$$

Wir benutzen die Näherung von oben:

$$U_y = \frac{C_2}{C_1} U = \frac{Q}{C_1}$$

und das ist nach dem 1. Maxwell'schen Gesetz proprtional zu D.

Wir erhalten wieder eine Hysterese-Schleife als Bild.

Betrachten wir nun einen kleinen, elektrischen Dipol im E-Feld (des TGS-Kristalls):

Wir nehmen an, das äußere Feld sei dasselbe am Ort des Dipols. Durch die Orientierung des Dipols im Feld entsteht eine elektrische Kraft, welche den Dipol im Feld ausrichtet, ein Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$\vec{M} = (Q\,\vec{r}) \times \vec{E}$$
$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Also das äußere E-Feld richtet die Dipole aus, so, daß das äußere Feld geschwächt wird.

Thermische Energie würde diese Ausrichtung aber wieder zerstören. Daher verschwindet das hysteretische Verhalten, wenn man den TGS-Kristall mit einem Föhn bearbeitet.

Offensichtlich gibt es wieder interne und externe Ladungen zubeachten. Wir beginnen wieder mit der 1. Maxwell'schen Gleichung im Vakuum:

$$\mathrm{div}\left(\epsilon_o \vec{E}\right) = \rho$$

Hier ist ρ aber die gesamte Ladunng also $\rho = \rho_{int} + \rho_{ext}$

$$\mathbf{div}\left(\epsilon_o \vec{\mathbf{E}}\right) = \rho_{\mathbf{ext}} + \rho_{\mathbf{int}}$$

Ziel ist es nun wieder die internen Beiträge verschwinden zu lassen, damit die Maxwell Gleichungen so bleiben wie sie sind. Dazu wird ρ_{int}auf die andere Seite gebrachtet:

$$\mathbf{div}\left(\epsilon_o \vec{\mathbf{E}}\right) - \rho_{\mathbf{int}} = \rho_{\mathbf{ext}}$$

Und wir definieren $\rho_{int} := -\text{div}(\vec{P})$ (Polarisation):

$$\mathbf{div}\left(\epsilon_o \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}\right) = \rho_{\mathbf{ext}}$$

Die Quelle elektrischen Flusses ist die externe Ladungdichte!

$\text{div}\, \vec{D} = \rho_{ext}$

$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_o}(\vec{D} - \vec{P})$

Die Quelle der Polarisation ist die negative, interne Ladungsdichte!

$\text{div}\, \vec{P} = -\rho_{int}$

$[P] = [D] = \frac{A\,s}{m^2} = \frac{A\,s\,m}{m^3} = \frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$

Häufig definiert man noch (hier: phenomenologisch)

Elektrische Suszeptibilität χ_{el}

$$\vec{P} = \epsilon_o \, \chi_{el} \, \vec{E}$$

$$[\, \chi_{el} \,] = 1$$

Einsetzen in $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \epsilon_o \, \vec{E} + \epsilon_o \, \chi_{el} \, \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_o \, (1 + \chi_{el}) \, \vec{E}$$

und mit

$$\epsilon_r = 1 + \chi_{el}$$

gilt

$$\vec{D} = \epsilon_o \, \epsilon_r \, \vec{E}$$

■ Abschlußbemerkung: Maxwell-Gleichungen

Offenbar gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten die Maxwell-Gleichungen aufzustellen, wenn wir im Gegensatz vom Vakuum Kontinua betrachten:

1. Möglichkeit:

Wir lassen alles beim Alten und unterscheiden keine Ladungen, dann ist

$$\rho = \rho_{int} + \rho_{ext}$$

$$\vec{j} = \overrightarrow{j_{int}} + \overrightarrow{j_{ext}}$$

Wir haben dann folgenden Formelsatz:

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

mit

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E}$$

2. Möglichkeit

Wir unterscheiden externe und intere Beiträge. Die Formeln sehen so aus:

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_{ext}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \overrightarrow{j_{ext}} + \dot{\vec{D}}$$

mit

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_o \left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

■ Beispiel: Ein einfaches Modell für ϵ_r in einem Medium

Wir betrachten hier ein Probevolumen V mit N Dipolen, diese sind entlang der x-Achse ausgerichtet und die Ladungspole sind jeweils mit einer kleinen Feder der Konstante D verbunden und bilden kleine Oszillatoren. Ein äußeres E-Feld zeige in x-Richtung.

Die einzelnen Dipolmomente betragen:

$$\mathbf{p = Q \cdot x}$$

damit ist die Polarisation P:

$$\mathbf{P = \frac{N \cdot p}{V} = \frac{N \cdot Q \cdot x}{V}}$$

x erhält man aus der Newton'schen Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{m\,\ddot{x} = Q \cdot E - Dx}$$

$$\mathbf{m\,\ddot{x} = Q \cdot E_o \cdot \sin(\omega t) - Dx}$$

Ansatz: $x = x_o \sin(\omega t)$

Einsetzen:

$$\mathbf{-x_o\, m\omega^2 \sin(\omega t) + Dx_o \sin(\omega t) = QE \sin(\omega t)}$$

Hieraus ergibt sich die Bedingung für x_o:

$$\mathbf{x_o = \frac{Q \cdot E_o}{D - m\omega^2}}$$

bei der Eigenfrequenz $\Omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$:

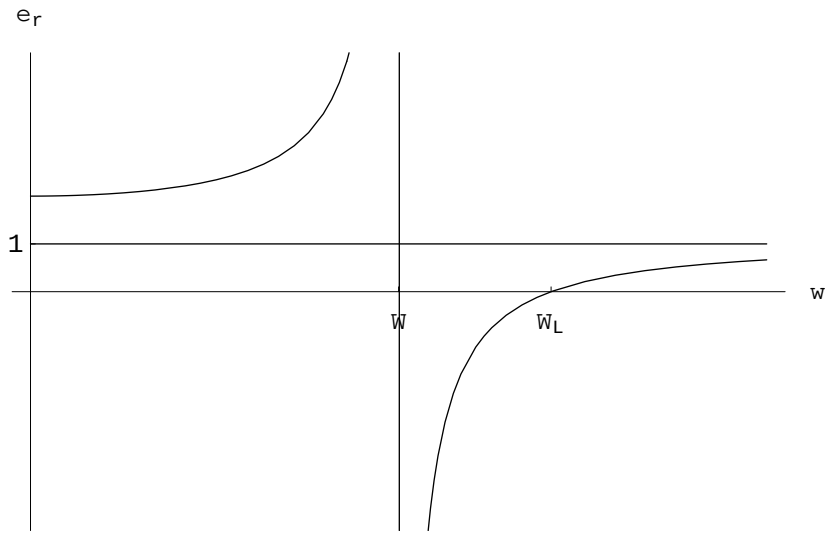
$$\mathbf{x_o = \frac{Q \cdot \frac{E_o}{m}}{\Omega^2 - \omega^2}}$$

Damit wird die Polarisation $P = \frac{NQ}{V} x$ zu:

$$\mathbf{P = \frac{NQ}{V}\, Q\, \frac{E_o}{m}\, \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}}$$

P ist aber definiert als $\epsilon_o \chi_{el} E$, damit erhält man für die Suszeptibilität in diesem Beispiel:

$$\chi_{el} = \frac{N Q^2}{V \cdot m \cdot \epsilon_o} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}$$



Bei der graphischen Darstellung fällt auf, daß ϵ_r im Bereich $[\Omega, \Omega_L]$ negativ wird. Hier ist keine Wellenausbreitung möglich, die Wellen werden gedämpft. Exakt bei Ω_L sind sogar longitudinale Wellen möglich, dies ist aber die Ausnahme.

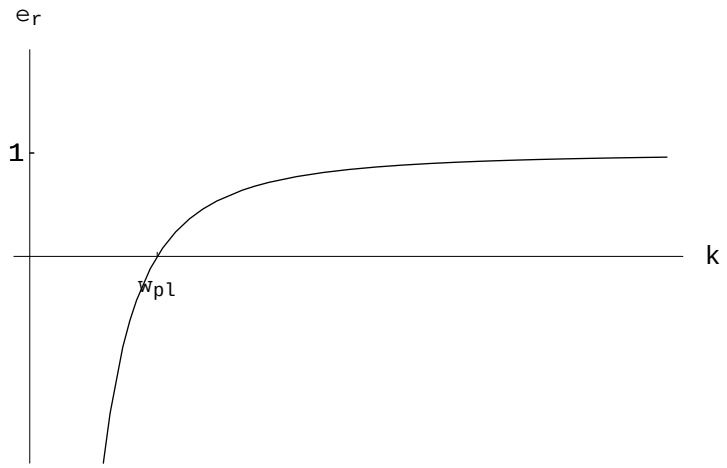
Es gilt natürlich die Dispersionsrelation:

$$\frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o \epsilon_r \mu_r}}$$

In diesem Beispiel gilt zusätzlich $\epsilon_r \equiv \epsilon_r(\omega)$.

Spezialfall: Metalle

In Metallen sind die Elektronen frei beweglich, D ist daher null. Als logische Folge gibt es keine Eigenfrequenz für Metalle. Die Graphik verändert sich sich damit zu:



Im Bereich $0 < k < \omega_{pl}$ sind wieder nur gedämpfte Wellen möglich, hier spiegeln die Metalle. Ab ω_{pl}, der Plasmafrequenz sind die Metalle durchsichtig.

■ Beispiel: Einfaches Modell für die Magnetisierung eines Mediums

Wir denken uns wieder ein Probevolumen V mit N verstreut angeordneten Kreisströmen, mit den einzelnen magnetischen Momenten b. b werde durch eine kleine Spiralfeder mit Konstante D in x-Richtung gerichtet. φ sei der Winkel zwischen b und der x-Achse. θ ist der Gegenwinkel. Ein B-Feld zeige in x-Richtung. Dadurch ergibt sich ein magnetisches Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$M = |\vec{m}| \cdot |\vec{B}| \cdot \mathrm{Sin}[\varphi]$$

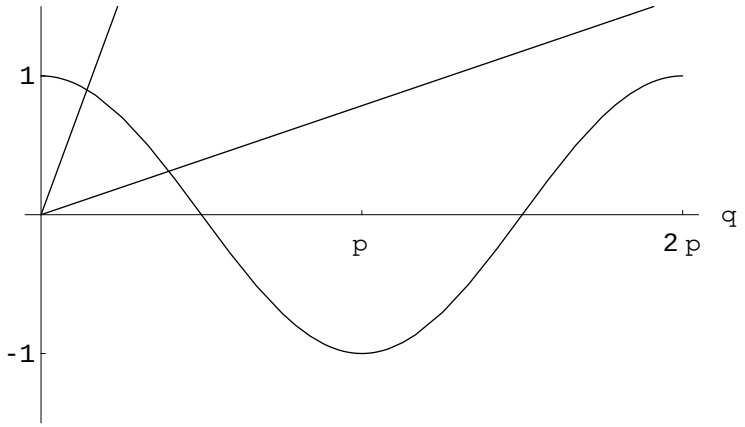
$$M = m \cdot B \cdot \mathrm{Cos}[\theta]$$

Aufgrund der Spiralfeder ergibt sich ein anderes Drehmoment:

$$M = D \cdot \theta$$

Die einzelnen Federn werden nun schwingen. Im stationären Fall gilt:

$$\mathbf{m \cdot B \cdot Cos[\theta] = D \cdot \theta}$$



Die steilere Gerade bedeutet ein kleines B, da hier die Feder weiter ausgelenkt werden kann. In diesem Fall (B klein) ist θ relativ klein gegen π. ($\rightarrow$ Cos[θ]$\approx$1)

$$\theta = \mathbf{m}\,\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{D}}$$

Die Magnetisierung in x-Richtung ist:

$$\mathbf{M_x} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{V}}\,\mathbf{m\,Sin[\theta]}$$

Da aber für kleine Winkel gilt $\theta \approx$ Sin[θ] kann man schreiben:

$$\mathbf{M_x} = \frac{\mathbf{N\,m^2}}{\mathbf{V\,D}}\,\mathbf{B} \sim \mathbf{B}$$

Hier kann man das Material wegen der Proportionalität gut durch ein μ_r bechreiben.

Für große B ist θ ungefähr $\frac{\pi}{2}$, also der Sinus von θ ist etwa 1. Damit ist die Magnetisierung:

$$\mathbf{M_x} = \frac{\mathbf{N\,m}}{\mathbf{V}} = \mathbf{const.}$$

... und das ist die Sättigungsmagnetisierung.

5.9.1 Der Depolaristionsfaktor

Wir hatten schon:

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$$

Wobei $\vec{E}$ das gesamte E-Feld darstellt, $\vec{D}$ die Flußdichte der externen Ladungen und $\vec{P}$ die Polarisation der internen Ladungen.

Die Frage: "Was ist P?"

Eine Antwort könnte sein:

$$\vec{P} = \epsilon_o \chi \cdot \vec{E}$$

Hier ist $\vec{E}$, das E-Feld am Ort des Dipols im Allgemeinen ist $\vec{E} \neq \overrightarrow{E_{\text{ext}}}$.

■ Beispiel: Kugel im Plattenkondensator

Im Kondensator herrsche das Feld E. Im Innern der Kugel existiert ein Gegenfeld, das Depolarisationsfeld.

Verwenden wir folgenden Ansatz:

Das E-Feld am Ort des elektrischen Dipol sei:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_{ext}} + \overrightarrow{E_{DP}}$$

Das Depolarisationsfeld $\overrightarrow{E_{\text{DP}}}$ wird von der Geometrie des Körpers abhängen, also der effektiven Summe aller Dipole hervorgerufen.

$\overrightarrow{E_{\text{DP}}}$ ist $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$ entgegengesetzt und zeigt also in $\vec{P}$-Richtung.

$$\overrightarrow{E_{\text{DP}}} = -\underline{\underline{N}} \cdot \vec{P} \, \frac{1}{\epsilon_o}$$

mit der

Depolarisationsmatrix $\underline{\underline{N}}$

$$\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} N_x & 0 & 0 \\ 0 & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_z \end{pmatrix}$$

$$[N_x] = [N_y] = [N_z] = 1 (\text{Depolarisationsfaktoren})$$

Was ist jetzt P?

$$\vec{\mathbf{P}} = \epsilon_o \chi \vec{\mathbf{E}}$$
$$\vec{\mathbf{P}} = \epsilon_o \chi \left(\overrightarrow{\mathbf{E}_{ext}} + \overrightarrow{\mathbf{E}_{DP}}\right)$$
$$\vec{\mathbf{P}} = \epsilon_o \chi \left(\overrightarrow{\mathbf{E}_{ext}} - \underline{\underline{\mathbf{N}}} \vec{\mathbf{P}} \frac{1}{\epsilon_o}\right)$$

Im einfachsten Fall ist $\underline{\underline{N}} = N \cdot \underline{\underline{1}}$, dann gilt:

$$\vec{P} = \epsilon_o \underbrace{\frac{\chi}{1 - N\chi}}_{\chi_{eff}} \overrightarrow{E_{ext}}$$

Durch die Messung von χ_{eff} kann man auf χ zurückrechnen und damit auf ϵ_r.

■ Beispiele: Depolarisationsfaktoren (ohne Herleitung)

Für eine Kugel gilt: $N = \frac{1}{3}$

Für eine dünne Platte, falls der externe Feldvektor senkrecht steht ist N = 1, liegt er parallel auf der Platte ist N = 0.

Für einen langen Zylinder mit $\overrightarrow{E_{ext}}$ senkrecht zur Zylinderachse ist $N = \frac{1}{2}$, ist er parallel so ist N = 0.