

Vorbereitung des Versuches
P2-71/74
Der Kreisel

Markus Engelhardt

Manuel Schmidberger

2005-06-20

Inhaltsverzeichnis

1	Die Drehimpulserhaltung	4
2	Freie Achsen	4
3	Der kräftefreie Kreisel	5
4	Die Dämpfung des Kreisels	5
5	Der Kreisel unter dem Einfluss äußerer Drehmomente	5
6	Die Hauptträgheitsmomente	6
7	Der Kreisel im beschleunigten Bezugssystem	6

Allgemeines zu Drehbewegungen

Unter dem Begriff Drehbewegung versteht man eine Bewegung, die sich in die Komponenten Translation und Rotation aufteilen lässt.

Drehbewegungen lassen sich durch folgende Größen beschreiben:
Drehimpuls, Drehmoment, Winkelgeschwindigkeit und Trägheitsmoment.

Drehimpuls

Der Drehimpuls \vec{L} (entspricht dem Impuls p in der Translation) ist das Vektorprodukt aus dem Abstand \vec{r} zur Drehachse und dem Impuls \vec{p} :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Drehmoment

Das Drehmoment \vec{M} (entspricht der Kraft F in der Translation) ist die Ableitung des Drehimpulses nach der Zeit. Es ist außerdem das Vektorprodukt aus dem Abstand \vec{r} zur Drehachse und der Kraft \vec{F} :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Winkelgeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit (entspricht der Geschwindigkeit v in der Translation) ist die Ableitung des Winkels α der Drehachse zum festgelegten Nullpunkt nach der Zeit. Sie ist außerdem das Vektorprodukt aus dem Abstand \vec{r} zur Drehachse und der Geschwindigkeit \vec{v} :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \vec{r} \times \vec{v}$$

Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment J ist ein Tensor, der von der Drehachse abhängig ist. Für ih gilt:

$$J = \sum_i m_i r_i^2 = \int r_i^2 dm$$

Mit Hilfe des Satzes von Steiner lässt sich daraus das Trägheitsmoment für eine beliebige Achse berechnen.

Alternativ kann auch der Trägheitstensor berechnet werden, um das Trägheitsmoment nicht für jede Achse neu berechnen zu müssen.

1 Die Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße.

Dies kann in verschiedenen Versuchen veranschaulicht werden. Sitzt beispielsweise eine Person mit ausgestreckten Armen (eventuell mit Gewichten) auf einen rotierenden Drehschemel und zieht anschließend die Arme in Richtung Rotationsachse heran, so nimmt das Gesamtträgheitsmoment ab. Entsprechend muss die Winkelgeschwindigkeit zunehmen.

Ähnlich verhält es sich, wenn eine auf dem Drehschemel sitzende Person einen rotierenden Fahrradkreisel in die Hand nimmt. Zu Beginn sollte die Achse parallel zum Boden gehalten werden und anschließend um 90° gedreht werden. Durch diese Bewegung ändert sich auch die Richtung des Drehimpulses. Damit der Gesamtdrehimpuls erhalten bleibt, muss sich der Drehimpuls der Person auf dem Drehschemel ebenfalls ändern. Bei entsprechender Versuchsanordnung kann man somit erreichen, dass eine leichte Drehbewegung der Person gestoppt und umgekehrt werden kann.

2 Freie Achsen

Ein quaderförmiger Gegenstand besitzt drei Symmetrieebenen.

Die drei Schnittgeraden dieser drei Ebenen nennt man die Hauptachsen des Quaders.

Rotiert nun ein Quader um eine dieser Hauptachsen, so ist das dabei entstehende Trägheitsmoment umso größer je kleiner die Länge der Rotationsachse ist. Dabei ist die Rotation um die kürzeste Hauptachse, also die Rotation mit dem größten Trägheitsmoment, am Stabilsten. Die Rotation um die Drehachse mit der mittleren Länge und dem mittleren Trägheitsmoment kann durch eine Störung, verursacht durch einen kurzen äußeren Kraftstoß, in eine Taumelbewegung gebracht werden, die schließlich in eine Rotation um die kürzeste Hauptachse übergeht. Deshalb bezeichnet man eine Rotation um die Hauptachse mittlerer Länge auch als instabil.

Eine Rotation um die längste Hauptachse mit dem kleinsten Trägheitsmoment kann ebenfalls in eine Rotation um die kürzeste Hauptachse überführt werden, hierbei ist jedoch ein wesentlich größerer Kraftstoß notwendig. Daher wird eine Rotation um die längste Hauptachse, wie auch die Rotation um die kürzeste Hauptachse, als stabil betrachtet.

Solche stabile Achsen nennt man auch freie Achsen.

Im Allgemeinen ist jeder rotierende Körper bemüht, um die Achse des größten Hauptträgheitsmomentes zu rotieren.

3 Der kräftefreie Kreisel

Ein Kreisel wird als kräftefrei bezeichnet, wenn sich die äußeren Kräfte auf ihn aufheben, er also im Schwerpunkt unterstützt wird.

Da hierbei das Drehmoment, also die Ableitung des Drehimpulses nach der Zeit, verschwindet, ist der Drehimpuls sowohl dem Betrage nach als auch in seiner Richtung erhalten. Damit bleibt auch die Rotationsenergie konstant. Bildet hierbei die Rotationsachse nicht gleichzeitig auch eine Hauptachse, so laufen die Figuren- und Drehachse um die raumfeste Drehimpulsachse herum. Diese Bewegungen nennt man Nutation.

In der Praxis ist jedoch nur das Umlaufen der Figurenachse beobachtbar.

In dieser Aufgabe soll die Nutation eines Kreisels in Abhängigkeit seiner Drehfrequenz um die Figurenachse bestimmt werden.

Dazu wird der innere Karadanrahmen des Kreisels leicht angeschlagen um eine Nutationsbewegung zu erzeugen.

4 Die Dämpfung des Kreisels

Um die Dämpfung eines Kreisels in Abhängigkeit seiner Laufzeit zu bestimmen, wird dieser auf eine Winkelgeschwindigkeit von 2000 Umdrehungen pro Sekunde gebracht. Anschließend wird alle 30 Sekunden die Winkelgeschwindigkeit mit Hilfe eines Reflexionsbandes gemessen.

Ein Reflexionsband wirft bei jeder Umdrehung des Kreisels das Licht einer Lampe auf eine Photodiode.

Es ist bei der Dämpfung des Kreisels ein exponentiell abfallender Verlauf der Winkelgeschwindigkeit zu erwarten.

5 Der Kreisel unter dem Einfluss äußerer Drehmomente

Eine Präzession wird dadurch erzeugt, dass am inneren Karadanrahmen ein oder mehrere Gewichte befestigt werden.

Nun kann die Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit der Rotationsfrequenz bestimmt werden. Dabei wird die Präzessionsfrequenz mit Hilfe einer Stoppuhr und die Rotationsfrequenz mit Hilfe eines Digitalzählers gemessen, welcher die Anzahl der Impulse aufnimmt.

Zusatzgewichte bewirken ein zusätzliches Drehmoment, das zu einer Änderung des Drehimpulses führt.

Wenn das Drehmoment senkrecht auf dem Impuls steht, so ändert sich zwar die Richtung des Drehimpulses, hingegen aber nicht dessen Betrag.

6 Die Hauptträgheitsmomente

Zur Bestimmung der Hauptträgheitsmomente werden die gemessenen Werte für die Nutationswinkelgeschwindigkeit und die Präzessionswinkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Drehwinkelgeschwindigkeit ω in Verbindung gebracht. Aus der Präzessionswinkelgeschwindigkeit lässt sich über die zwei Messreihen auf ein Hauptträgheitsmoment schließen, die anderen ergeben sich aus der Nutationswinkelgeschwindigkeit.

Mit Hilfe der Formeln aus der Vorbereitungshilfe ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit der Nutation ω_N :

$$\omega_N = \frac{J_C \cdot \omega}{\sqrt{J_A^2 + (J_C^2 - J_A^2) \sin^2 \delta}} = (\text{mit } \delta \approx 0) \quad \frac{J_C}{J_A} \cdot \omega$$

Hierbei ist δ der Öffnungswinkel des Nutationskegels.

Unter Berücksichtigung des zusätzlichen Trägheitsmomentes J_B des äußeren Karadanrahmens ergibt sich folgende modifizierte Gleichung für die Winkelgeschwindigkeit der Nutation ω_N :

$$\omega_N = \frac{J_C}{\sqrt{J_A \cdot J_B}} \cdot \omega$$

wobei J_A und J_B die Trägheitsmomente bzgl. der Koordinatenachsen sind. Die Winkelgeschwindigkeit für die Präzession ω_P ist gegeben durch:

$$\omega_P = \frac{m \cdot g \cdot r}{\omega \cdot J_C}$$

wobei m die Masse, g die Erdbeschleunigung, r der Abstand vom Schwerpunkt und J_C das Hauptträgheitsmoment um die Figurenachse ist.

7 Der Kreisel im beschleunigten Bezugssystem

Aufgrund der Erdrotation befindet sich jeder Kreisel in einem beschleunigten Bezugssystem.

Bei einem Kreiselkompass heben sich die äußeren Kräfte auf, und er behält die Lage seiner Drehimpulsachse bei. Durch Fesselung eines Freiheitsgrades der Drehung wirkt die Erddrehung als Zwangskraft auf den Kreisel ein. Eine solche Fesselung kann dadurch erreicht werden, indem der innere Karadanrahmen inelastisch an die Horizontalebene gebunden wird.

Die Erdrotation kann mit Hilfe des Drehtisches simuliert werden. Dazu ist jedoch noch der Holzkeil nötig, um eine geographische Breite von z.B. 30° zu erzeugen. Ohne den Holzkeil entspricht die Platzierung auf dem Drehtisch einem Pol der Erde. Dort gibt es keine Nord-Süd-Richtung auf die sich die Figurenachse einstellen könnte.